Prof. D. M. Sintsof.

Leçons sur les applications géométriques du calcul différentiel.

ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ ПРИЛОЖЕНІЯ

дифференціальнаго исчисленія

(Дифференціальная Геометрія).

Профессора Харьковскаго Университета

Д. М. Синцова.

ХАРЬКОВЪ.

Типографія и Литографія М. Зильберберга и С-вья.

Рыбная улица, д. № 30.

1908.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Печатая курсъ геометрическихъ приложеній дифференціальнаго исчисленія, я задавался прежде всего цѣлью дать своимъ слушателямъ пособіе къ лекціямъ. Разумѣется, для печати матеріалъ, дававшійся при устномъ изложеніи, нѣсколько пополненъ, но въ общемъ онъ воспроизводитъ тѣ лекціи, которыя мною читаются начиная съ 1903 года въ Харьковскомъ Университетѣ и нѣсколько разъ издавались въ литографированномъ видѣ.

По содержанію, настоящій курсъ воспроизводитъ съ нѣкоторыми дополненіями обычный матеріалъ. Я стремился въ теоріи поверхностей дать тотъ матеріалъ, который можетъ быть безъ труда полученъ, если уравненіе поверхность брать въ видѣ, рѣшенномъ относительно координаты z, и избѣгалъ введенія параметрической формы. Благодаря этому я не ввелъ, конечно, ряда вопросовъ. Но благодаря этому мое изложеніе доходитъ какъ разъ до того пункта, съ котораго начинаетъ свой „Курсъ приложеній дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія“ проф. Б. Я. Букрѣевъ, къ которому интересующійся и можетъ перейти послѣ изученія моихъ лекцій.

Я стремился сдѣлать изъ курса геометрическихъ приложеній болѣе цѣльный курсъ—курсъ дифференціальной геометріи и освѣжить матеріалъ, сообщаемый въ качествѣ примѣровъ и приложеній. Мнѣ легче однако было это сдѣлать въ отдѣлѣ, посвященномъ плоскимъ кривымъ, гдѣ я имѣлъ подъ руками такое прекрасное пособіе, какъ

G. Loria. Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. L. 1902. Вмѣстѣ съ обоими томами курса G. Scheffers'a Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie и статьями Mangoldt'a, Scheffers'a и Lilienthal'я въ III томѣ и Pringsheim'a во II томѣ Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften книга Loria была моимъ главнымъ пособіемъ. Кромѣ того, я пользовался курсами *E. Cesàro.* Elementi di calcolo infinitesimale и Lezioni di geometria intrinseca, столь богатыми интересными геометрическими примѣрами [1]), а также соотвѣтственными главами курсовъ анализа G. Humbert'a и E. Goursat.

Чертежи къ курсу были вычерчены бывшимъ моимъ слушателемъ В. X. Даватцемъ, который составлялъ также первую часть этихъ лекцій для перваго литографированнаго изданія 1903 г. Онъ же держалъ, начиная съ 4-го листа корректуру во вторую руку, указалъ мнѣ на нѣкоторые вкравшіеся недосмотры и помогъ мнѣ составить списокъ опечатокъ. За всю эту помощь я приношу ему здѣсь мою живѣйшую благодарность.

^{5}/x.—08.

Проф. *Д. Синцовъ.*

[1]) Оба курса уже переведены на нѣмецкій языкъ; было бы желательно, чтобы хотя первый появился въ русскомъ переводѣ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стран.

Приложенія дифференціальнаго исчисленія къ геометріи въ пространствѣ.

Стран.

Замѣченныя опечатки.

Стран.	Строк.	Напечатано.	Должно быть.
1	6 сн.	analisin	analysin
12	15 сн.	§ 3	§ 4
12	12 и 4 сн.	$f(x)$	$F(x)$
15	1 св.	**Примѣры**	**§ 5. Примѣры:**
16	5 сн.	$M'Q$	$M'N$
17	3 св.	пред. $\sin \Delta\theta$	пред. $\sin \frac{\Delta\theta}{2}$
17	—	черт. 16.	черт. 15.
18	4 св.	„подкасательная“ разумѣется „полярная“	
18	3 сн.	мнимымн	мнимыми
20	6 сн.	угловыхъ	узловыхъ
23	—	черт. 17—20	черт. 16—19
25	—	черт. 12.	черт. 20.
27	6 сн.	$\frac{(m-1)(m-1)}{2}$	$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$
28	6 св.	, г. и т. д.	, ч. и т. д.
34	7 св.	$+\varphi_{n-1}(m)]+$	$+\varphi_{n-2}(m)]+$
34	11 св.	$\frac{1}{x^n}\varphi_0$	$\frac{1}{x^{n-1}}\varphi_0$
39	8 сн.	пропущено	(2)
42	3 св.	$\overline{MN'^2}$	$\overline{MM'^2}$
45	2 св.	ложащихъ	лежащихъ
45	13 св.	$s=a\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)+C$	$s=\frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)+C$
45	16 св.	$R=a\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{x}{a}}}{2}\right)^2$	$R=a\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)$
61	7 св.	§ 29.	§ 30.
63	1 св.	§ 30.	§ 31.
111	6 св.	Особыя	Особенныя
128	13 св.	Асимпоты	Асимптоты

Начиная съ черт. 23 стр. 27 до черт. 43 стр. 81 номера чертежей должны быть уменьшены на 1.

Введеніе.

Аналитическая геометрія имѣетъ своимъ предметомъ изученіе свойствъ линій и поверхностей по ихъ уравненію въ той или другой системѣ координатъ. Начиная съ простѣйшихъ формъ, изучаемъ прежде всего геометрическія образованія, опредѣляемыя въ наиболѣе употребительныхъ декартовыхъ координатахъ уравненіями 1-й и 2-й степени, и получаемъ при двухъ перемѣнныхъ (въ геометріи на плоскости) прямую линію и коническія сѣченія (кругъ, эллипсъ, параболу, гиперболу), при трехъ измѣреніяхъ плоскость и поверхности 2-го порядка (шаръ, эллипсоидъ, гиперболоиды и параболоиды, цилиндры и конусы 2-го порядка).

Если будемъ брать болѣе сложныя уравненія, то получимъ болѣе сложныя фигуры и бо́льшее ихъ разнообразіе. Такъ уже общее уравненіе 3-й степени въ декартовыхъ координатахъ

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3\,(Ex^2 + 2Fxy + Gy^2) + \\ + 6\,(Hx + Ky) + J = 0 \tag{1}$$

кривой третьяго порядка содержитъ 9 произвольныхъ параметровъ (отношенія 9 изъ коэффиціентовъ къ 10-му) и поэтому послѣ преобразованія координатъ, дающаго возможность дать опредѣленныя значенія тремъ изъ нихъ, сохраняетъ еще 6 коэффиціентовъ, которымъ можно придавать всевозможныя значенія. И дѣйствительно, изслѣдуя возможные типы приведеннаго уравненія кривой (1), еще Newton въ своей Enumeratio linearum 3-ii ordinis различаетъ 72 вида, къ которымъ надо присоединить еще 24 вида, имъ пропущенныхъ. L. Euler въ своемъ Introductio in analisin infinitorum, принимая во вниманіе только характеръ безконечно удаленныхъ вѣтвей кривой, различаетъ 12 родовъ, но замѣчаетъ при этомъ, что бо́льшая часть этихъ родовъ такъ обширны, что содержатъ кривыя, весьма различныя въ ихъ конечно-удаленныхъ частяхъ. Болѣе детальная классификація J. Plücker'а (System der analytischen Geometrie 1835) различаетъ 216 видовъ.

Еще бо́льше можно установить различныхъ видовъ кривыхъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ 4-й степени, содержащимъ 14 произвольныхъ коэффиціентовъ.

Поэтому является необходимымъ, отказавшись отъ детальнаго изученія кривыхъ, опредѣляемыхъ уравненіями все болѣе и болѣе высокихъ степеней, перейти къ изученію свойствъ кривыхъ линій заданныхъ уравненіемъ n-ой степени вообще ($n =$ ц. ч.). Но и этимъ не исчерпывается далеко разнообразіе возможныхъ линій. Еще древнимъ были извѣстны такія кривыя, какъ спираль Архимеда, циклоида, квадратрикса Динострата. Эти кривыя не могутъ быть выражены уравненіемъ алгебраическимъ въ декартовыхъ координатахъ. Имъ придаютъ названіе трансцендентныхъ; онѣ отличаются чрезвычайнымъ разнообразіемъ формъ и типовъ и совершенно не допускаютъ такой классификаціи, какъ кривыя, заданныя алгебраическимъ уравненіемъ (кривыя *алгебраическія*), ибо единственный объединяющій всѣ ихъ признакъ—чисто отрицательный: ихъ *уравненіе не алгебраическое.*

Является поэтому необходимымъ дать общую теорію кривыхъ плоскихъ, т. е. систематизировать тѣ вопросы, которые одинаковымъ образомъ могутъ быть разрѣшаемы независимо отъ частнаго вида уравненія, опредѣляющаго кривую. Таковыми явились тѣ вопросы, рѣшать которые дало возможность изобрѣтеніе анализа безконечно-малыхъ.

Сказанное выше съ тѣмъ-же правомъ относится и къ кривымъ, не укладывающимся на плоскости, и къ поверхностямъ. Совокупность наиболѣе важныхъ въ примѣненіяхъ и наиболѣе простыхъ вопросовъ этого рода и составляетъ содержаніе курса «Геометрическихъ приложеній дифференціальнаго исчисленія», названіе котораго аналогично „приложенію алгебры къ геометріи“, какъ до начала 19-го столѣтія называли *аналитическую геометрію.* И здѣсь, опираясь на объединяющій и опредѣляющій содержаніе курса методъ, слѣдовало-бы говорить о *дифференціальной геометріи*, какъ и называетъ, напримѣръ, свой классическій курсъ по теоріи поверхностей *L. Bianchi* [1]).

Содержаніе курса распредѣляется на три части: 1) теорія плоскихъ кривыхъ; 2) теорія кривыхъ въ пространствѣ и тѣсно связанныхъ съ ними такъ называемыхъ развертывающихся поверхностей; 3) теорія поверхностей.

---

[1]) Lezioni di geometria differenziale I-е изд. 1893 г., II-е 1902 г.;—есть нѣмецкій переводъ съ I изд.

I. Теорія плоскихъ кривыхъ.

§ 1. Понятіе о кривой. Понятіе о кривой или считаютъ совершенно понятнымъ и не нуждающимся въ особомъ опредѣленіи (Дидро и д'Аламберъ) или объясняютъ самое бóльшее, что это „длина безъ ширины" или „граница поверхности" (Евклидъ) или „путь точки" (Проклъ). Descartes въ началѣ 2-й книги своей «Геометріи» (1637 г.) задается вопросомъ, *какія линіи можно принять въ геометрію,* и приходитъ къ заключенію, что это тѣ, которыя мы теперь называемъ алгебраическими. Противъ такого слишкомъ узкаго понятія возсталъ въ особенности *Лейбницъ* указывая, что и трансцендентныя линіи, какъ циклоида и другія, должно считать совершенно равноправными съ алгебраическими. Но методъ координатъ Декарта привелъ къ изображенію линій уравненіями, и это имѣло рѣшающее вліяніе на дальнѣйшее развитіе понятія о кривой линіи, поставивъ понятіе о „линіи" въ тѣснѣйшую связь съ понятіемъ о „функціи".

Въ аналитической геометріи, въ методѣ координатъ, положеніе каждой точки плоскости опредѣляется и при томъ единственнымъ образомъ двумя *координатами*, т. е. въ концѣ концовъ двумя опредѣленными числами, чтó для плоской кривой доставляетъ въ качествѣ ариѳметическаго образа безконечную систему паръ вещественныхъ чиселъ (x, y), такъ что каждому взятому x подчиняется одно или нѣсколько значеній y, какъ „функціи" x. Самый терминъ *„функція"* встрѣчается впервые у Лейбница, какъ обозначеніе для такихъ отрѣзковъ (длинъ), какъ абсцисса, ордината, касательная, нормаль, радіусъ кривизны (и „безчисленныя другія"), которыя стоятъ въ опредѣленныхъ отношеніяхъ къ отдѣльнымъ (принимаемымъ за перемѣнныя) точкамъ кривой.

Задача о колебаніи струнъ привела въ особенности Euler'а (который первоначально подъ функціей понималъ аналитическое выраженіе) къ *произвольнымъ функціямъ,* заданнымъ графически произвольно начерченной и отнесенной къ декартовой системѣ кривою. Но такая данная графически зависимость только тогда можетъ служить полнымъ опредѣленіемъ функціи $y = f(x)$, если данъ геометрическій или механическій *законъ* ея образованія, который можетъ привести къ опредѣленнымъ способамъ вычисленія, хотя бы и различнымъ для различныхъ интерваловъ значеній независимаго перемѣннаго; начерченная по произволу кривая не опредѣляетъ въ сущности функціи, ибо по ней для каждаго x соотвѣтствующія ординаты могутъ быть вычислены лишь приближенно, и мы получаемъ собственно то, что F. Klein называетъ полосою (Flächenstreifen). Здѣсь является на сцену задача интерполированія.

Самое общее понятіе о функціи однозначной (Dirichlet) говоритъ, что y есть (однозначная) функція x въ интервалѣ (a, b), если всякому значенію $a \leqq x \leqq b$ соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе y,—независимо отъ того, какъ осуществляется подчиненіе значеній y отдѣльнымъ значеніямъ x. Въ силу сказаннаго выше, это опредѣленіе ограничивается требованіемъ, чтобы y для каждаго x изъ интервала (a, b) было опредѣлено ариѳметически.

Изъ всей совокупности такихъ функцій для насъ прежде всего важно выдѣлить непрерывныя функціи: $f(x)$—называется непрерывною для $x = \alpha$ функціей непрерывно измѣняющагося перемѣннаго x, если $f(\alpha)$ совершенно опредѣленна и если для произвольно малаго $\varepsilon > 0$ всегда существуетъ $\delta > 0$, такъ что $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$, если $|x - \alpha| < \delta$.

Долгое время считали, что непрерывная функція есть и дифференцируемая, но примѣръ Вейерштрасса $\left[y = \sum\limits_0^\infty a^n \cos(b^n \pi x)\right.$ при $0 < a < 1$, b— нечетное и цѣлое—не имѣетъ производной при $\left. ab > 1 + \frac{3}{2}\pi\right]$, за которымъ послѣдовали и другіе, показалъ, что функціи дифференцируемыя составляютъ болѣе тѣсный классъ, чѣмъ непрерывныя. Но и этого ограниченія еще не достаточно, чтобы получить ту геометрическую картину, которую ранѣе по аналогіи съ алгебраическими и нѣкоторыми элементарными трансцендентными функціями соединяли съ представленіемъ о непрерывной функціи вообще,—именно, чтобы существовала соотвѣтственная „*обыкновенная*“ кривая [$\equiv$непрерывная линія, которая въ каждомъ разсматриваемомъ интервалѣ состояла бы изъ конечнаго числа выпуклыхъ дугъ,—пересѣкаемыхъ каждою прямою не болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ,—безъ угловъ и заостреній, хотя можетъ быть и изъ отдѣльныхъ прямолинейныхъ частей]. Необходимымъ для этого условіемъ служитъ то, чтобы функція $f(x)$ была частично—*монотонна* (не имѣла ни въ одномъ конечномъ интервалѣ безконечно-большого числа maximum-minimum-овъ). Установлено, что существуютъ непрерывныя монотонныя функціи, которыя, ни въ какомъ хотя-бы и сколь угодно маломъ интервалѣ, не будутъ сплошь дифференцируемыми. Существуютъ непрерывныя дифференцируемыя функціи, которыя ни въ какомъ хотя-бы сколь угодно маломъ интервалѣ не монотонны. Всѣ три условія должны быть соблюдены (и при томъ для *каждаго* направленія, принимаемаго за ось x-овъ), чтобы уравненіе $y = f(x)$ опредѣляло обыкновенную кривую.

§ 2. Виды уравненія кривой. Въ декартовыхъ координатахъ (почти исключительно принимаются координаты *прямоугольныя*) кривая линія такимъ образомъ опредѣлится уравненіемъ

$$y = f(x) \tag{1}$$

или

$$x = \varphi(y), \tag{1'}$$

если за независимое перемѣнное взять не абсциссу, а ординату. Болѣе симметричный видъ принимаетъ въ отношеніи координатъ уравненіе, если взять его въ нерѣшенномъ видѣ

$$F(x, y) = 0. \tag{2}$$

Такого вида извѣстныя намъ уравненія круга, эллипса, гиперболы, и всякая вообще алгебраическая кривая можетъ быть задана уравненіемъ подобнаго вида (*неявная* форма).

Но столь же симметричный видъ имѣетъ третья форма уравненія кривой,—когда обѣ координаты даны въ функціи вспомогательнаго независимаго перемѣннаго, которое обозначимъ черезъ t. (Въ механикѣ за такое вспомогательное перемѣнное чаще всего берутъ время).

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \tag{3}$$

Между тремя видами уравненій кривой возможенъ переходъ: рѣшивъ (2) относительно y, придемъ къ (1), точно также, найдя изъ $x = \varphi(t)$ обратно $t = \varphi^{-1}(x)$ и подставивъ получимъ $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ — уравненіе вида (1). Напротивъ, это послѣднее есть частный случай (3): нужно взять $x = t$, тогда $y = f(t)$.

Можно также сказать, что (1) есть частный случай (2), потому что (1) можно написать

$$y - f(x) = 0.$$

Слѣдуетъ замѣтить только, что не всегда (1) и (2) вполнѣ тожественны. Если (2) алгебраическое уравненіе относительно y, напр., степени n, то рѣшивъ его относительно y получимъ не одно рѣшеніе, а n рѣшеній, пусть $f_1, f_2 \ldots f_n$,— и кривыя

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x) \ldots y = f_n(x),$$

только въ своей совокупности образуютъ кривую (2), составляя отдѣльныя ея вѣтви.

Напр., для круга

$$x^2 + y^2 = r^2$$

находимъ

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

и одинъ корень

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2}$$

даетъ вѐрхнюю полуокружность, а другой

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

нижнюю.

Асимптоты гиперболы опредѣляются уравненіемъ

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0.$$

Одна соотвѣтствуетъ одному корню:

$$y = +\frac{b}{a}x$$

другая другому

$$y = -\frac{b}{a}x.$$

Одна и таже кривая можетъ быть различнымъ образомъ опредѣлена уравненіемъ въ параметрической формѣ. Стоитъ, дѣйствительно, положить въ (3) $t = \theta(s)$ и получимъ—

$$x = \varphi(\theta(s)) = \Phi(s),$$

$$y = \psi(\theta(s)) = \Psi(s);$$

новымъ вспомогательнымъ перемѣннымъ стало s. Напр., эллипсъ, какъ извѣстно, можетъ быть опредѣленъ въ параметрической формѣ уравненіями

$$x = a \,.\, \cos t$$

$$y = b \,.\, \sin t$$

Но $\cos t$ и $\sin t$ раціонально выражаются черезъ $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$. Полагая $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \tau$ найдемъ

$$x = a\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \qquad y = \frac{2b\tau}{1+\tau^2}$$

Въ полярной системѣ координатъ можемъ подобнымъ образомъ опредѣлять кривую или уравненіемъ типа (1):

$$r = F(\theta) \quad \text{или} \quad \theta = f(r),$$

или же уравненіемъ, нерѣшеннымъ относительно координатъ:

$$F(r, \theta) = 0,$$

или наконецъ въ параметрической формѣ

$$r = \varphi(t), \quad \theta = \psi(t).$$

Уравненіе перваго типа мы нашли для коническихъ сѣченій, отнесенныхъ къ фокусу и оси:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Уравненіе круга, не проходящаго черезъ полюсъ, представляетъ примѣръ уравненія 2-го типа:

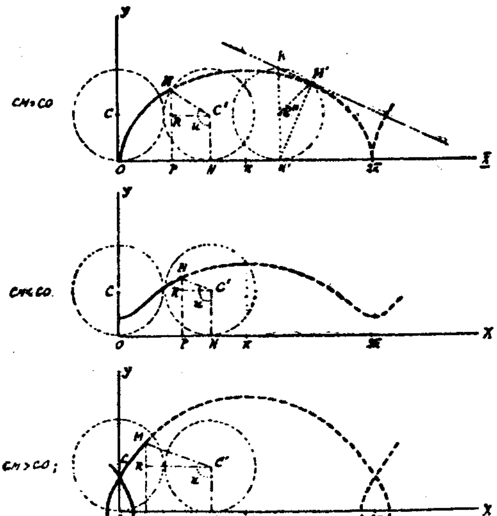
$$a^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)$$

гдѣ (r_0, θ_0) означаютъ полярныя координаты центра, и a есть радіусъ.

Въ дальнѣйшемъ мы даемъ рядъ примѣровъ кривыхъ, при чемъ ограничиваемся указаніемъ закона образованія кривой (который служитъ и ея опредѣленіемъ) и намѣчаемъ вкратцѣ выводъ на основаніи этого ея уравненія. Цѣль этихъ §§-овъ сообщить матеріалъ, изъ котораго можно было бы въ дальнѣйшемъ черпать примѣры кривыхъ, обладающихъ тѣми или другими свойствами, тою или другою особенностью.

§ 3. Примѣры уравненій кривой. Покажемъ, какъ по данному кинематическому или геометрическому закону составить уравненіе кривой.

1) Циклоида—геометрическое мѣсто точки окружности круга, катящагося безъ скольженія по прямой. Примемъ эту прямую за ось x-въ, перпендикуляръ—въ точкѣ этой оси, гдѣ описывающая кривую точка M находится въ началѣ движенія,—за ось y-овъ. Пусть кругъ прокатился въ положительномъ направленіи OX на ON. Если $\angle MC'N = u$ и радіусъ круга$=a$, то $ON = au$, $C'N = MC' = a$



Черт. 1.

$$x = OP = ON - PN = ON - RC',$$
$$y = MP = MR + RP = MR + C'N.$$

Но изъ $\triangle MRC'$:

$$RC' = a\cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = a\sin u\,; \quad MR = a\sin\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = -a\cos u\,,$$

итакъ—

$$x = au - a\sin u = a\,(u - \sin u).$$
$$y = a - a\cos u = a\,(1 - \cos u).$$

Можно исключить u:

$$\cos u = \frac{a-y}{a}, \quad \sin u = \sqrt{1 - \left(\frac{a-y}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2}$$

и слѣдовательно,

$$x = a\,.\,\arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}\,.$$

1а) Если предположимъ, что описывающая точка M лежитъ не на окружности катящагося круга, но на разстояніи d отъ его центра, то—при тѣхъ-же начальныхъ предположеніяхъ получатся уравненія:

$$RC' = d\,.\,\sin u$$
$$M'R = d\,.\,\cos u$$

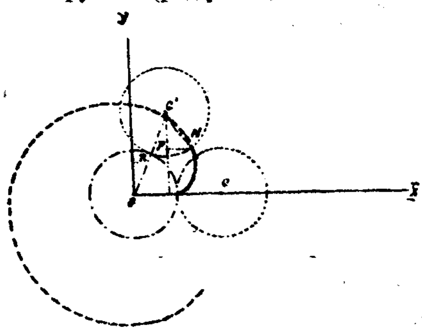
и такимъ образомъ

$$x = au - d\,.\,\sin u$$
$$y = a - d\,.\,\cos u$$

Если $d < a$ кривая наз. *циклоидою укороченною*, при $d > a$—*удлинненною циклоидою.*

2) Эпициклоида (и гипоциклоида) описывается точкою круга, катящагося безъ скольженія по другому кругу. Координаты центра подвижнаго круга — (радіуса a)

$$\xi = (R + a)\cos t$$
$$\eta = (R + a)\sin t$$



Черт. 2.

при томъ положеніи круговъ, когда линія центровъ дѣлаетъ уголъ t съ осью OX. Координаты точки M эпициклоиды,—

$$x = \xi + a\cos\alpha$$
$$y = \xi - a\sin\alpha\,,$$

гдѣ

$$\alpha = \angle\, C'MP = \frac{\pi}{2} - \left(u - \frac{\pi}{2} + t\right) = \pi - (u + t)\,;$$

такъ что

$$x = \xi - a\cos(u + t)$$

$$y = \eta - a\sin(u + t)\,.$$

Условіе отсутствія скольженія даетъ

$$R\,.\,t = a\,.\,u\,,$$

или полагая $R = n\,.\,a$,

$$u = n\,.\,t\,,$$

такъ что окончательно

$$x = (n + 1)\,a\cos t - a\cos(n + 1)\,t\,,$$

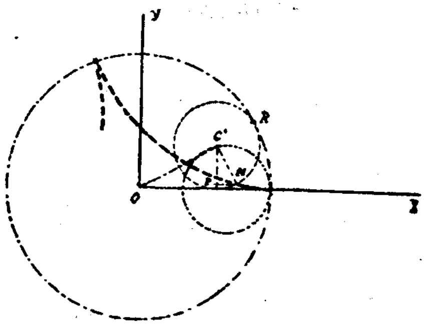
$$y = (n + 1)\,a\sin t - a\sin(n + 1)\,t\,.$$

Гипоциклоида получится при внутреннемъ катаніи:

$$x = (R - a)\cos t + a\sin\beta$$
$$y = (R - a)\sin t - a\cos\beta$$
$$\beta = \angle MC'P = \pi - u - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) = $$
$$= \frac{\pi}{2} - u + t$$
$$x = (R - a)\cos t + a\cos(u - t)$$
$$y = (R - a)\sin t - a\sin(u - t),$$

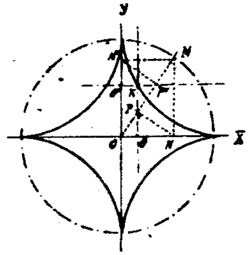
или вводя $u = n\,.\,t$, $R = na$,

$$x = (n - 1)\,a\cos t + a\cos(n - 1)\,t$$
$$y = (n - 1)\,a\sin t - a\sin(n - 1)\,t.$$



Черт. 3.

3) Астроида. Возьмемъ окружность радіуса a и соединимъ точку ея съ центромъ. Проэктируемъ (ортогонально) M на OX въ точку N, точку N на OM въ точку P и точку P снова на OX въ точку Θ. Тоже самое продѣлаемъ съ осью y-овъ. Проэктируемъ M на OY въ N', N' на OM въ P'. P' на OY въ Θ'. Искомая кривая—геометрическое мѣсто точки пресѣченія $P\Theta$ и $P'\Theta'$, когда M описываетъ окружность:



Черт. 4.

$$X = O\Theta = OP\,.\cos t = (ON\,.\cos t)\,.\cos t =$$
$$= (OM\,.\cos t)\,.\cos^2 t = a\cos^3 t.$$

$$Y = O\Theta' = OP'\,.\sin t = ON'\sin^2 t =$$
$$= OM\sin^3 t = a\sin^3 t.$$

Исключая t получаемъ уравненіе кривой подъ видомъ

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

Это уравненіе можетъ быть приведено къ раціональному виду возвышеніемъ въ кубъ —

$$x^2+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)+y^2=a^2$$

или

$$x^2+y^2-a^2+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}=0.$$

Стало быть

$$(x^2+y^2-a^2)^3=-27a^2x^2y^2$$

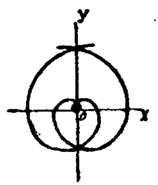
4) **Логариѳмика:** $y=be^{\frac{x}{a}}$ (при b и a соизмѣримыхъ имѣетъ только одну точку, обѣ координаты которой соизмѣримы: $(x=0,\ y=b)$.

5) **Линія сводовъ:** $y=\frac{1}{2}b\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

6) **Цѣпная линія:** $y=a\dfrac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}=a\cos h\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

Уравненія нѣкоторыхъ кривыхъ удобнѣе получать въ полярныхъ координатахъ.

7) **Спираль Архимеда.** Геометрическое мѣсто точки, равномѣрно движущейся по прямой, которая вращается также равномѣрно около неподвижной точки. Если a пространство, проходимое точкою по прямой въ единицу времени, α — уголъ, на который въ это время поворачивается прямая, то



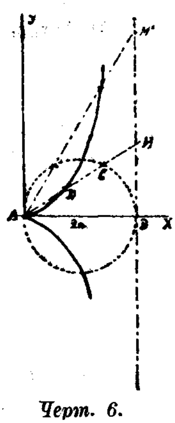
Черт. 5.

$$r=a.t;\ \theta=\alpha t$$

отсюда:

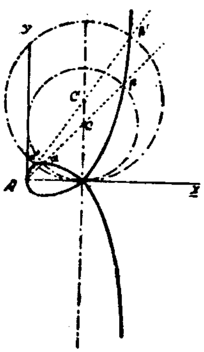
$$r=m.\theta\left(m=\frac{a}{\alpha}\right).$$

5) **Циссоида Діоклеса.** Изъ точки A, лежащей на кругѣ діаметра $2a$, проводятъ сѣкущую до пересѣченія въ M съ касательной къ кругу въ точкѣ B, діаметрально противоположной A, и откладываютъ $AD=CM$ (C—встрѣча AM съ кругомъ).



Черт. 6.

$$r=\frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}\quad\text{или}\quad(x^2+y^2)\,x=2ay^2.$$



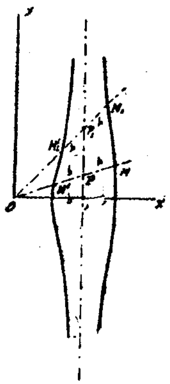
Черт. 7.

6) Строфоида. Изъ точки A, взятой на сторонѣ прямого угла, проводимъ сѣкущую, встрѣчающую другую сторону этого угла въ точкѣ C. Изъ C, какъ центра, описываемъ окружность радіусомъ, равнымъ разстоянію C отъ вершины прямого угла. Точки встрѣчи окружности съ AC и ея продолженіемъ принадлежатъ кривой:

$$r = a \sec\theta \pm a \,.\, \operatorname{tang}\theta$$

или

$$(x^2 + y^2)(x - 2a) + a^2 x = 0\,.$$



Черт. 8.

Преобразованіе координатъ: $y = y'$, $x = a - x'$ приводитъ уравненіе къ виду: $(x^2 + y^2)\,x = a\,(x^2 - y^2)$

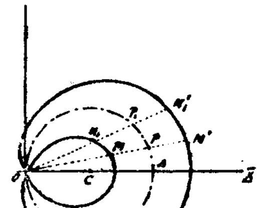
7) Конхоида Никомеда. Изъ точки 0 проводимъ сѣкущія до встрѣчи съ прямою и отъ точекъ встрѣчи откладываемъ по обѣ стороны данную длину b. Если a разстояніе точки 0 отъ данной прямой, то

$$r = \frac{a}{\cos\theta} \pm b$$

или

$$(x^2 + y^2)\;(x - a)^2 = b^2 x^2\,.$$

Смотря потому, будетъ ли $a > b$, $a = b$ или $a < b$ получаемъ три вида конхоиды.



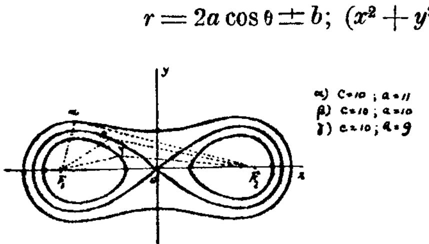
Черт. 9.

8) Улитка Паскаля. Законъ образованія аналогиченъ; прямая замѣняется кругомъ діаметра $2a$ и точка 0 лежитъ на кругѣ. Стало быть, образуется улитка Паскаля такъ:

Черезъ точку круга 0 проводимъ сѣкущія OM, OM', ... и отъ точки M встрѣчи съ кругомъ откладываемъ въ ту и другую сторону длину, равную b.

$$r = 2a\cos\theta \pm b;\;\; (x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2\;(x^2 + y^2).$$

Кривая также имѣетъ три вида (на чертежѣ $b < 2a$).



Черт. 10.

9) Овалы Кассини. Геометрическое мѣсто точекъ, произведеніе разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ равно данной величинѣ a^2.

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4.$$

Если положить $y = 0$, то для x получимъ биквадратное уравненіе

$$(x^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4$$

или

$$(x^2 - c^2)^2 = a^4.$$

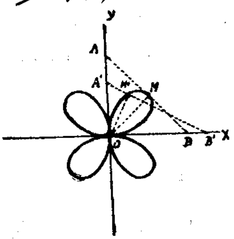
Такимъ образомъ:

$$x = \pm\sqrt{c^2 \pm a^2}$$

1) Если $c^2 > a^2$ всѣ четыре корня вещественны, кривая состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ частей.

2) Если $c^2 = a^2$, два корня обращаются въ нуль,—овалы смыкаются въ началѣ координатъ, кривая называется *лемнискатою*.

3) Если $c^2 < a^2$, то вещественныхъ точекъ на оси x-овъ имѣемъ только двѣ. (Кривая имѣетъ форму бисквита при $a < c\sqrt{2}$ и овала при $a \overline{\gtrless} c\sqrt{2}$).

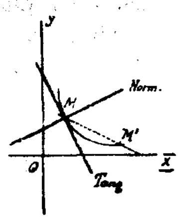


Черт. 11.

10) Четырехлепестный вѣнчикъ. Прямая постоянной длины ($=2a$) движется опираясь концами на двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя, изъ точки пересѣченія которыхъ опускаемъ на нее перпендикуляръ. Кривая есть геометрическое мѣсто его подошвы. Если $AB = 2a$, $r = a\sin 2\theta$ или $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$.

§ 3. Касательная и нормаль. Касательною въ точкѣ кривой называемъ предѣльное положеніе, которое занимаетъ сѣкущая, соединяющая двѣ точки кривой, если эти двѣ точки сближаются и въ предѣлѣ совпадаютъ. Пусть M и M' двѣ точки кривой $y = f(x)$ съ координатами соотвѣтственно (x, y) и (x_1, y_1). Тогда, называя X, Y текущія координаты точки сѣкущей MM', напишемъ ея уравненіе

$$Y - y = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}(X - x).$$



Черт. 12.

Если M' стремится къ совпаденію съ M, то коэффиціентъ

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{F(x_1) - F(x)}{x_1 - x}$$

имѣетъ своимъ предѣломъ производную $\frac{df(x)}{dx}$ (если, какъ предположили, она существуетъ) и такимъ образомъ уравненіе *касательной MT* (въ которую обращается сѣкущая) принимаетъ видъ:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x). \tag{4}$$

Если кривая дана уравненіемъ вида (2) § 2, то по извѣстному правилу $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$, и (4) приводится по умноженіи на F'_y и переносѣ членовъ къ виду:

$$F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)=0. \tag{5}$$

Если наконецъ уравненіе кривой дано въ параметрической формѣ, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{y'}{x'},$$

если для краткости означимъ

$$\frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dx}{dt} = x';$$

уравненіе (4) приметъ видъ:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} \tag{6}$$

или по раздѣленіи на dt и замѣнѣ $x'dt = dx$, $y'dt = dy$,

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy}.$$

Перпендикуляръ къ касательной въ точкѣ M (которая наз. *точкою прикосновенія*) называется *нормалью* кривой въ точкѣ M. Уравненіе нормали напишется, какъ уравненіе прямой, проходящей черезъ точку $M(x, y)$ и перпендикулярной къ касательной:

для (1):

$$Y-y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x)$$

или

$$(X-x)+\frac{dy}{dx}(Y-y)=0, \tag{7}$$

для (2) § 2

$$\frac{X-x}{F'_x} = \frac{Y-y}{F'_y} \tag{8}$$

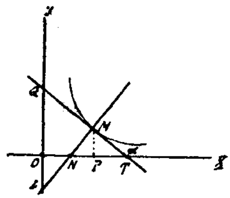
для (3) § 2

$$x'(X-x)+y'(Y-y)=0. \tag{9}$$

Касательная и нормаль опредѣляютъ на осяхъ координатъ отрѣзки, вычисленіемъ которыхъ и займемся. Пусть касательная встрѣчаетъ ось X

въ точкѣ T. Тогда MT наз. ***длиною касательной*** **или просто** *касательной*. Обозначимъ ее T. Проэкція MT на ось x-овъ т. е. отрѣзокъ PT, наз. *подкасательной* (S_t— субтангента).

Если нормаль встрѣчаетъ ось x-овъ въ точкѣ N, то MN наз. *длиною нормали* (или просто *нормалью*, N), а ея проэкція NP на ось x-овъ наз. *поднормалью* (S_n, субнормаль).



Черт. 13.

Обозначимъ еще α уголъ касательной съ осью x-овъ, такъ что $\operatorname{tang}\alpha=\frac{dy}{dx}$ и $\angle MNP=\alpha-\frac{\pi}{2}$.

Тогда изъ $\triangle MPN$ имѣемъ:

$$NP=MP\operatorname{cotg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-MP\operatorname{tg}\alpha.$$

$$MN=MP:\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-MP\,.\sec\alpha,$$

т. е.

$$S_n=yy'\,;\ N=\pm\, y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Изъ $\triangle MPT$:

$$PT=MP\,.\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right),\quad MT=MP:\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$$

т. е.

$$S_t=\frac{y}{\frac{dy}{dx}}=y\frac{dx}{dy},\quad T=\frac{y}{\frac{dy}{dx}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

Отрѣзки касательной **на осяхъ получимъ, полагая въ (4)** $Y=0$ и потомъ $X=0$:

$$OT=x-y\frac{dx}{dy}\,;\ \ OQ=Y=y-x\frac{dy}{dx}.$$

Отрѣзки нормали на осяхъ найдемъ подобнымъ образомъ:

$$ON=x+y\frac{dy}{dx},\quad OL=y+x\frac{dx}{dy}.$$

Наконецъ длина перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ на касательную

$$P=\pm\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=\pm\frac{ydx-xdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Примѣры: 1) Парабола $y^2 = 2px \therefore 2y\frac{dy}{dx} = 2p$, т. е. $y\frac{dy}{dx} = S_n = = p = \text{const} \therefore$ *для параболы поднормаль постоянная.* Обратно парабола есть единственная кривая, обладающая этимъ свойствомъ.

2) Логариѳмика:

$$y = be^{\frac{x}{a}} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{be^{\frac{x}{a}}}{a} = \frac{y}{a} \therefore \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = a:$$

у логариѳмики подкасательная постоянная, и обратно логариѳмика единственная кривая, обладающая этимъ свойствомъ.

3) Кругъ съ центромъ въ началѣ координатъ:

$$x^2 + y^2 = a^2 \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \quad N = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = a,$$

нормаль есть величина постоянная.

Подобнымъ образомъ найдемъ, что для этого круга постоянною будетъ и длина перпендикуляра изъ начала координатъ на касательную.

4) Цѣпная линія $y = a\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)$: проэкція ординаты на нормаль есть величина постоянная и равная a—наименьшей ординатѣ.

5) Общая задача о *подэрахъ* (podaire, Fusspunktcurve). Подэрою называютъ геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нѣкоторой опредѣленной точки на касательныя къ данной кривой. Если данная точка есть (a, b), то перпендикуляръ изъ нея на касательную—

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

имѣетъ уравненіемъ

$$Y - b = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - a).$$

Изъ этихъ двухъ уравненій надо исключить координаты точки прикосновенія съ помощью уравненія кривой.

a) Подэра круга относительно центра его есть тотъ же самый кругъ.

b) Подэра параболы относительно вершины есть циссоида.

c) Подэра параболы относительно точки $(0, b)$, лежащей на касательной въ вершинѣ, есть офіурида,—кривая, которой простѣйшее уравненій есть

$$x(x^2 + y^2) = y(bx - cy).$$

Къ этому виду въ данномъ примѣрѣ приводится помощью преобразованія $y = -y' + b$, $x = x'$ и при параметрѣ параболы равномъ $2c$.

d) Подэра параболы относительно точки встрѣчи ея директриссы съ осью есть строфоида.

e) Подэра круга вообще есть улитка Паскаля.

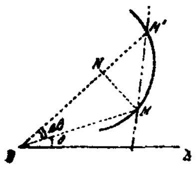
6. Кривая, для которой касательная T имѣетъ постоянную длину a, удовлетворяетъ уравненію $y^2 + y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = a^2$. Ея уравненіе въ декартовыхъ координатахъ:

$$x = a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2} \text{ (Tractrix).}$$

7. *Касательная къ циклоидѣ.* Угловой коэффиціентъ касательной: $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ равенъ для циклоиды $\frac{d[a(1-\cos u)]}{d[a(u-\sin u)]} = \frac{\sin u}{1-\cos u} = \operatorname{cotg}\frac{u}{2}$. Слѣд., $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}$, если $u < \pi$, и $\alpha = \frac{3\pi}{2} - \frac{u}{2}$, если $u > \pi$. Отсюда получаемъ построеніе касательной къ циклоидѣ. Пусть M' — точка ея (см. черт. 1); тогда соединяя M' съ концами K и N' вертикальнаго діаметра круга, имѣемъ $\angle M'KN' = \frac{1}{2} M'C''N' = \frac{1}{2}(2\pi - u) = \pi - \frac{u}{2}$.

Слѣдовательно, уголъ KM' съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ равенъ $\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{u}{2}$, т. е. KM' есть касательная къ циклоидѣ въ точкѣ M', а $M'N'$ — нормаль.

§ 6. Касательная и нормаль въ полярныхъ координатахъ. Положеніе касательной опредѣлится въ полярной системѣ координатъ, если извѣстенъ уголъ, который эта прямая дѣлаетъ съ радіусомъ векторомъ точки прикосновенія. Чтобы получить выраженіе этого угла, разсмотримъ сѣкущую, которая проходитъ черезъ точки $M = (r, \theta)$ и $M' = (r + \Delta r, \theta + \Delta\theta)$. Опуская изъ M на OM' перпендикуляръ MN, изъ прямоугольнаго треугольника MNM' имѣемъ: $\operatorname{tg} NM'M = \frac{MN}{M'N}$.



Черт. 14.

Но $MN = r \sin \Delta\theta$ и $M'Q = r + \Delta r - r . \cos \Delta\theta = \Delta r + r\,(1 - \cos\Delta\theta)$.

Такимъ образомъ

$$\operatorname{tg} NM'M = \frac{r \,.\, \sin \,.\, \Delta\theta}{\Delta r + r(1 - \cos \Delta\theta)}.$$

Чтобы перейти къ предѣлу $\Delta\theta = 0$, раздѣлимъ числителя и знаменателя на $\Delta\theta$. Тогда, обозначая $\underset{M=M'}{\text{пред.}} \angle NM'M = \psi$ и замѣчая, чтб при $\Delta\theta$ стремящемся къ нулю

$$\text{пред.}\,\frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta}=1, \quad \text{пред.}\,\frac{\Delta r}{\Delta\theta}=\frac{dr}{d\theta} \ \text{ и пред.}\,\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta}=$$

$$=\text{пред.}\,\frac{2\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}=\underset{\Delta\theta=0}{\text{пред.}}\left(\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right)\text{пред.}\,\sin\Delta\theta=0\,,$$

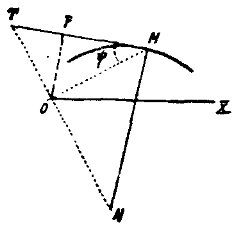
имѣемъ

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\psi=\frac{rd\theta}{dr}\,.$$

Аналогичные полученнымъ выше отрѣзкамъ получаются въ этой системѣ координатъ такимъ образомъ: черезъ полюсъ O проводимъ прямую, перпендикулярную къ полярному радіусу-вектору OM. Пусть она пересѣкаетъ соотвѣтственную касательную въ точкѣ T, а нормаль въ точкѣ N. Тогда отрѣзокъ MT—*полярная касательная*, MN—*полярная нормаль*, ихъ проэкціи: OT—*полярная подкасательная*, ON—*полярная поднормаль*.

Замѣчая, что $\angle OMT=\psi=\angle ONM$ получаемъ: изъ $\triangle OMT$,

$$OT=OM.\operatorname{tg}\psi \ \text{ или } \ S_t=\frac{r^2}{\frac{dr}{d\theta}}\,.$$



Черт. 16.

$$MT=\sqrt{\overline{OM}^2+\overline{OT}^2}$$

или

$$T=r\sqrt{1+\frac{r^2}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

Изъ $\triangle MON$:

$$ON=\overline{OM}.\operatorname{cotg}\psi \ \text{ или } \ S_n=r:\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}=\frac{dr}{d\theta}\,.$$

$$MN=\sqrt{\overline{OM}^2+\overline{ON}^2}=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,.$$

Опредѣлимъ еще длину OP—перпендикуляра, опущеннаго изъ полюса на касательную: изъ $\triangle OPM$

$$OP=p=r\sin\psi=\frac{r^2}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}\,.$$

Примѣры: 1) Спираль Архимеда $r = a\theta$ имѣетъ поднормаль полярную постоянную и есть единственная кривая, обладающая этимъ свойствомъ.

2) Постоянную подкасательную имѣетъ гиперболическая спираль $r\theta = a$.

3) Постоянная полярная нормаль будетъ у круга, проходящаго черезъ полюсъ и касательнаго къ полярной оси.

4) Постоянную (полярную) касательную имѣетъ кривая, которую Côtes назвалъ Tractrix complicata, и которая можетъ быть выражена уравненіемъ $\theta = -\frac{1}{r}\sqrt{a^2-r^2} - \arcsin\left(\frac{r}{a}\right)$, если постоянное значеніе полярной касательной означимъ a.

Въ полярныхъ координатахъ удобно опредѣлять подэру относительно полюса. Дѣйствительно, полярныя координаты точки P подэры будутъ

$$\varphi = -\left(\frac{\pi}{2} - \psi - \theta\right) = \psi + \theta - \frac{\pi}{2} \text{ и } \varrho = p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}.$$

Такимъ образомъ найдемъ: 5) циссоида есть подэра параболы относительная ея вершины.

6) Спираль гиперболическая имѣетъ своею подэрою упомянутую выше *tractrix complicata* (собственно симметричную).

§ 7. Порядокъ и классъ кривой. Порядкомъ кривой называется число точекъ, въ которыхъ кривая пересѣкается съ прямою. Если кривая задана уравненіемъ въ декартовыхъ координатахъ, то порядокъ ея равенъ степени ея уравненія. Дѣйствительно, число точекъ пересѣченія кривой, заданной уравненіемъ

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

степени m, и прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

равно $m.1 = m$ — степени уравненія кривой [1]).

Такимъ образомъ, чисто аналитическій признакъ — алгебраичность уравненій—имѣетъ и геометрическое значеніе, что и оправдываетъ названіе такихъ кривыхъ *алгебраическими*.

Если (1) уравненіе трансцендентное, то его можно разсматривать, какъ алгебраическое безконечно-высокой степени, и слѣдовательно, гово-

[1]) Нѣкоторыя изъ этихъ точекъ для *данной* прямой могутъ оказаться мнимыми,— и при томъ, если уравненіе (2) имѣетъ вещественные коэффиціенты, число такихъ мнимыхъ точекъ пересѣченія съ прямою будетъ *четное*.

рить о порядкѣ трансцендентныхъ кривыхъ нельзя, хотя для отдѣльныхъ такихъ кривыхъ дѣйствительное число точекъ пересѣченія съ прямою можетъ быть и конечно; напримѣръ, цѣпная линія не имѣетъ ни съ какой прямой болѣе двухъ общихъ вещественныхъ точекъ.

Задача о проведеніи касательной изъ точки, не лежащей на кривой, приводитъ къ другому важному понятію—*о классѣ* кривой. *Классомъ* кривой называется число касательныхъ, которыя можно провести къ кривой изъ точки, на ней не лежащей. (Разумѣется, приходится говорить главное о кривыхъ алгебраическихъ).

Въ аналитической геометріи мы видѣли что *кривая 2-го порядка есть въ тоже время и кривая 2-го класса*. Но вообще говоря порядокъ, и классъ кривой не одинаковы. Дѣйствительно, какъ и для кривыхъ 2-го порядка задача проведенія касательной черезъ данную точку (ξ, η), не лежащую на кривой, приводится къ опредѣленію числа точекъ кривой (1), касательная въ которыхъ проходитъ черезъ данную точку (ξ, η), т. е. къ нахожденію числа паръ значеній (x, y) удовлетворяющихъ системѣ уравненій

$$F\ (x,\ y) = 0 \tag{1}$$

$$(\xi - x)\ F'_x + (\eta - y)\ F'_y = 0 \tag{2}$$

Оба уравненія степени m, но какъ и въ случаѣ кривыхъ 2-го порядка, степень (2) можетъ быть понижена съ помощью (1). Если (2) переписать подъ видомъ

$$\xi\ F'_x + \eta\ F'_y - (xF'_x + yF'_y) = 0 \tag{2'}$$

то видимъ, что члены m-го порядка входятъ только черезъ $xF'_x + yF'_y$; но съ помощью извѣстнаго свойства однородныхъ функцій (теорема Эйлера) можно показать, что эти члены уничтожаются въ силу уравненія (1).—Дѣйствительно, лѣвая часть этого уравненія есть сумма однородныхъ функцій отъ x, y измѣреній $m, m-1, \ldots 2, 1, 0,$ — совокупностей членовъ одного измѣренія въ x, y, такъ что означая $F_k\ (x, y)$ однородную функцію x, y измѣренія k можемъ писать

$$F(x, y) \equiv F_m(x, y) + F_{m-1}(x, y) + \ldots + F_1(x, y) + F_0$$

и слѣдовательно,

$$xF'_x + yF'_y \equiv \left(x\frac{\partial F_m}{\partial x} + y\frac{\partial F_m}{\partial y}\right) + \left(x\frac{\partial F_{m-1}}{\partial x} + y\frac{\partial F_{m-1}}{\partial y}\right) + \\ \ldots + \left(x\frac{\partial F_1}{\partial x} + y\frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Но по теоремѣ Эйлера

$$x\frac{\partial F_k}{\partial x}+y\frac{\partial F_k}{\partial y}=k.F_k.$$

Такимъ образомъ

$$xF'_x+yF'_y\equiv mF_m+(m-1)F_{m-1}+\ldots+2F_2+1.F_1.$$

Если слѣдовательно, отнять отсюда

$$mF\equiv mF_m+mF_{m-1}+\ldots+mF_0$$

то получимъ

$$xF'_x+yF'_y-m.F\equiv -F_{m-1}-2F_{m-2}-\ldots-(m-1)F_1-mF_0.$$

такимъ образомъ (2) приводится къ виду:

$$0=\xi F'_x+\eta F'_y-mF+F_{m-1}+2F_{m-2}+\ldots+(m-1)F_1+mF_0$$

и слѣдовательно, въ силу (1) можетъ быть замѣнено такимъ:

$$(2'') \qquad 0=\xi F'_x+\eta F'_y+F_{m-1}+2F_{m-2}+\ldots+(m-1)F_1+mF_0.$$

[При перемѣнныхъ ξ, η это и представитъ уравненіе касательной точки (1)]. Уравненіе (2″) уже только степени $m-1$ относительно x и y, и такимъ образомъ число рѣшеній (1) и (2″) есть $m(m-1)$. *Кривая порядка m будетъ (вообще говоря) класса $n=m(m-1)$.*

При $m=2$ и $m(m-1)=2$, но уже при $m=3$, $n=6$.

Присутствіе на кривыхъ *особенныхъ* точекъ однако понижаетъ классъ кривой: можно показать, (такъ называемыя формулы Плюккера), что кривая порядка m, имѣющая d угловыхъ точекъ и r точекъ возврата (см. ниже) будетъ класса $n=m(m-1)-2d-3r$.

Особенныя точки.

§ 8. Двойныя точки. Уравненіе касательной

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

даетъ, каждый разъ когда $\frac{dy}{dx}$ существуетъ и опредѣленно, совершенно опредѣленную и единственную прямую; такая точка кривой есть *обыкновенная*. Если $\frac{dy}{dx}$ обращается въ безконечность, а $\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ имѣетъ при этомъ опредѣленное значеніе, то и такая точка будетъ обыкновенною,—она имѣетъ касательную, параллельную оси x-овъ: $X = x$. Примѣръ—вершины эллипса, лежащія на большой оси; уравненіе касательной:

$$Y - y = -\frac{b^2 x}{a^2 y}(X - x)$$

при

$$y = 0,\ x = \pm a$$

обращается въ

$$X \mp a = 0$$

(также вершины гиперболы, лежащія на поперечной оси, вершина параболы). Если напротивъ касательныхъ будетъ не одна, а болѣе, или касательная будетъ неопредѣленна, то точка называется *особенною* точкою кривой. При этомъ, слѣдовательно, $\frac{dy}{dx}$ должно становиться неопредѣленнымъ выраженіемъ вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Если взять 2-й видъ уравненія кривой: $F(x, y) = 0$, то это приводитъ къ условіямъ

$$\begin{aligned} F'_x &= 0\,, \\ F'_y &= 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Случаи, когда F'_x и F'_y обращаются въ ∞, оставимъ въ сторонѣ и остановимся на первомъ случаѣ. Равенство

$$F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

уже не дастъ при (1) значенія $\frac{dy}{dx}$. Беремъ отсюда вторую полную производную по x

$$F''_{x^2} + 2F''_{xy}\frac{dy}{dx} + F''_{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F'_y \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Если подставить координаты особенной точки, то при конечномъ $\frac{d^2y}{dx^2}$ послѣдній членъ отпадаетъ, и остается уравненіе

$$F''_{x^2} + 2F''_{xy}\left(\frac{dy}{dx}\right) + F''_{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \tag{4}$$

которое доставитъ два значенія для $\frac{dy}{dx}$, и стало быть двѣ касательныхъ, если только не обращаются въ нуль всѣ три его коэффиціента.

Такая точка наз. *двойною*. Смотря по характеру корней уравненія (4), могутъ быть *три* типа двойныхъ точекъ:

I. Корни (4) вещественны и различны. Условіе этого:

$$F''^{\,2}_{xy} - F''_{x^2}\, F''_{y^2} > 0$$

кривая имѣетъ двѣ различныхъ касательныхъ въ такой двойной точкѣ и слѣдовательно пересѣкаетъ сама себя. Такая двойная точка наз. *узловой точкой* или *узломъ*.

1) Примѣръ, *строфоида* $x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2)=0$ имѣетъ особенную точку въ началѣ координатъ:

$$(F'_x)_0=(3x^2+y^2-2ax)_0=0,\ (F'_y)_0=(2xy+2ay)_0=0.$$

Но

$$(F''_{x^2})_0=(6x-2a)_0=-2a\neq 0,\ (F'_{xy})_0=(2y)_0=0,$$

$$F''_{y^2}=(2x+2a)_0=2a\neq 0$$

и слѣдовательно, (4) имѣетъ видъ:

$$2a\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2-2a=0\ \therefore\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\pm 1.$$

II. Корни (4) могутъ быть равны между собой:

$$(F''_{xy})^2-F''_{x^2}\cdot F''_{y^2}=0,$$

кривая имѣетъ двѣ совпавшія касательныя, точка наз. *точкою возврата*.

2) Примѣръ:—циссоида $x(x^2+y^2)-2ay^2=0$ въ (0, 0) имѣетъ точку возврата, ибо

$$(F''_{x^2})_0=(6x)_0=0,\ (F''_{xy})_0=(2y)_0=0,$$

$$(F''_{y^2})_0=-4a\neq 0,$$

и слѣдовательно, (4) приметъ видъ

$$-4a\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2=0.$$

III. Корни (4) мнимые сопряженные:

$$(F''_{xy})^2-F''_{x^2}F''_{y^2}<0$$

Кривая не имѣетъ касательныхъ, т. е. не имѣетъ безконечно-близкихъ къ такой точкѣ вещественныхъ точекъ. Точка наз. *уединенною*.

3) Примѣръ — *спутница циссоиды* (откладываемъ $MN=CM$ на продолженіи сѣкущей AM—ср. черт. 6): $r=2a\sec\theta+2a\cos\theta$ или

$$x(x^2+y^2)-2a(2x^2+y^2)=0.$$

Здѣсь снова

$$(F'_x)_0=(F'_y)_0=0,\quad \text{но}\quad (F''_{x^2})_0=(6x-8a)_0=-8a,$$

$$(F''_{xy})_0=(2y)_0=0,\quad (F''_{y^2})_0=(2x-4a)_0=-4a$$

и такимъ образомъ (4) принимаетъ видъ:

$$-8a-4a\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2=0.$$

4) Взаимная связь и появленіе того или другого типа особенныхъ точекъ хорошо иллюстрируется на *расходящихся параболахъ*, которыя выражаются уравненіемъ

$$py^2=(x-a)(x-b)(x-c).$$

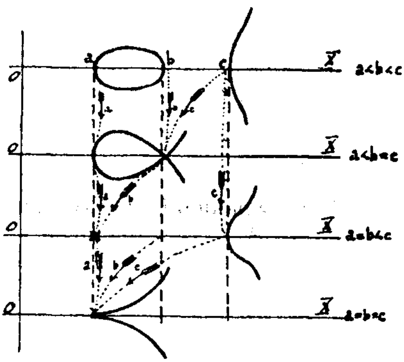
a) Если a, b, c вещественны и не равны: $a<b<c$, то кривая состоитъ изъ овала и вѣтви параболическаго типа, уходящей въ безконечность: правая часть положительна при $a<x<b<c$ и при $x>c$, и отрицательна при $x<a$ и при $b<x<c$. Особыхъ точекъ нѣтъ. Parabola campaniformis cum ovali Ньютона.

b) Если $b=c$: $py^2=(x-a)(x-b)^2$, правая часть положительна (или 0) при $x\geqq a$ и отрицательна при $x<a$. F'_x и F'_y обращаются въ 0 при $y=0$, $x=b$. При этомъ $(F''_{x^2})=2(a-b)$,

$$(F''_{xy})=0=-2(b-a),\ F''_{y^2}=2p:$$

кривая имѣетъ узелъ въ точкѣ $x=b\,(a<b)$ parabola nodata.

c) Если $a=b=c$, три точки A, B, C, совпадаютъ, петля (A, B) сводится къ точкѣ.



Черт. 17—20.

$$F\equiv py^2-(x-a)^3=0.$$

F'_x и F'_y обращаются въ 0 при $y=0$, $x=b$. F''_{x^2} и F''_{xy} также, $F''_{y^2}=2p$: точка (a, 0) есть *точка возврата* (parabola cuspidata).

d) Если a и b совпадаютъ: $F=py^2-(x-a)^2(x-c)=0$ $a<c$, то F'_x и F'_y равны 0 при $y=0$, $x=a$, а

$$(F''_{x^2})=+2(c-a)$$

$$(F''_{y^2})=2p$$

Уравненіе (4):

$$2(c-a)+2p\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2=0$$

имѣетъ мнимые корни, но (a, 0) принадлежитъ кривой (parabola punctata).

5) *Конхоида* Никомеда $(x^2+y^2)(x-a)^2-b^2x^2=0$ имѣетъ точку $(0,0)$ особенною: $(F'_x)_0=(F'_y)_0=0$. Такъ какъ $(F''_{x^2})=2(a^2-b^2)$, $(F''_{xy})_0=0$ и $(F''_{y^2})_0=2a^2$, то при $b<a$ имѣемъ *уединенную* точку, при $b=a$—точку возврата и при $b>a$—узелъ.

6) *Улитка Паскаля* $(x^2+y^2-2ax)^2-b^2(x^2+y^2)=0$ въ началѣ координатъ имѣетъ особенную точку, ибо

$$(F'_x)_0=0 \quad \text{и} \quad (F'_y)_0=0.$$

При этомъ

$$(F''_{x^2})_0=8a^2-2b^2, (F''_{xy})_0=0, (F''_{y^2})_0=-2b^2.$$

Слѣдовательно, при $b<2a$ имѣемъ узловую точку, при $b=2a$ точку возврата и при $b>2a$ — уединенную точку.

7) Лемниската $(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2-a^4=0$ имѣетъ въ началѣ координатъ *узелъ.*

8) Астроида $(x^2+y^2-a^2)^3+27a^2x^2y^2=0$ (или $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$) имѣетъ въ точкахъ—

$$x=\pm a, \ y=0 \ \text{и} \ x=0, \ y=\pm a$$

точки возврата.

§ 9. Уравненіе касательныхъ въ двойной точкѣ. Уравненіе пары касательныхъ въ двойной точкѣ получимъ замѣняя въ (4) $\frac{dy}{dx}$ черезъ $\frac{Y-y}{X-x}$. Дѣйствительно, если m_1 и m_2 корни (4), то двѣ касательныхъ имѣютъ уравненія

$$\frac{Y-y}{X-x}=m_1 \ \text{и} \ \frac{Y-y}{X-x}=m_2 \ \text{или} \ \frac{Y-y}{X-x}-m_1=0 \ \text{и} \ \frac{Y-y}{X-x}-m_2=0$$

а (4) можетъ быть написано:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}-m_1\right)\left(\frac{dy}{dx}-m_2\right)=0. \tag{4'}$$

Если замѣнимъ $\frac{dy}{dx}$ черезъ $\frac{Y-y}{X-x}$, то полученное уравненіе будетъ удовлетворяться тѣми значеніями X, Y, которыя дѣлаютъ отношеніе $\frac{Y-y}{X-x}$ равнымъ или m_1 или m_2, т. е. тѣми, которыя принадлежатъ той или другой касательной. Итакъ—

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X-x)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(X-x)(Y-y)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(Y-y)^2=0 \tag{5}$$

будетъ уравненіе совокупности двухъ касательныхъ въ двойной точкѣ.

Замѣтимъ, что лѣвая часть (5) представляетъ собою совокупность членовъ 2-го измѣренія въ разложеніи по степенямъ $X-x$ и $Y-y$ функціи

$$F(X,Y)\equiv F[x+(X-x),\ y+(Y-y)]$$

и такъ какъ для двойной точки кривой $F(x,y)=0$ и $F'_x=0$ и $F'_y=0$, то это будетъ совокупность членовъ *низшаго* измѣренія.

§ 10. Тройныя и вообще кратныя точки. Если, кромѣ того, для особенной точки обращаются въ 0 и всѣ частныя производныя 2-го порядка:

$$F''_{x^2}=0,\quad F''_{xy}=0,\quad F''_{y^2}=0,$$

то значенія $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ для такой точки опредѣляются изъ уравненія 3-й степени

$$F'''_{x^3}+3F'''_{x^2y}\left(\frac{dy}{dx}\right)+3F'''_{xy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+F'''_{y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0 \tag{6}$$

и уравненіе совокупности касательныхъ будетъ

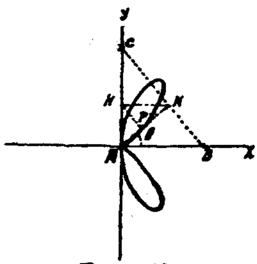
$$F'''_{x^3}(X-x)^3+3F'''_{x^2y}(X-x)^2(Y-y)+3F'''_{xy^2}(X-x)(Y-y)^2+F'''_{y^3}(Y-y)^3=0,$$

если не всѣ частныя производныя 3-го порядка обращаются при этомъ въ 0. Такія точки можно распредѣлять на типы, какъ и точки двойныя, въ зависимости отъ характера корней (6). Тѣже соображенія могутъ быть продолжены, и такимъ образомъ приходимъ къ понятію о точкѣ m-кратной,—для которой обращаются въ нуль всѣ частныя производныя лѣвой части уравненіи кривой до порядка $(m-1)$ включительно.

Четырехлепестный вѣнчикъ $(x^2+y^2)^3-4a^2x^2y^2=0$ имѣетъ въ началѣ координатъ *четверную* точку—уравненіе совокупности касательныхъ:

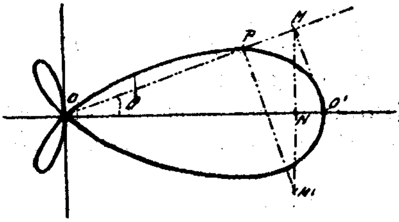
$$-16a^2X^2Y^2=0.$$

Прямой двулистникъ $(x^2+y^2)^2-axy^2=0$ (или $r=a\cos\theta\sin^2\theta$) имѣетъ въ началѣ *тройную* точку; законъ его образованія: $AB=a$, CB — произвольная сѣкущая черезъ B; проводимъ $AM\perp CB$, $HM\parallel AB$ и $HP\perp AM$. Отсюда $AM=$ $=a\cos.\theta$, $HM=AM\cos\theta$, $PM=HM\cos\theta=$ $=AM\cos^2\theta\ .\because.\ r=AM-PM=a\cos\theta(1-\cos^2\theta)$.



Черт. 12.

Прямой трилистникъ: (G. de Longchamps): черезъ начало проводимъ подъ угломъ θ прямую и на нее изъ точки O' $(OO' = a)$ опускаемъ перпендикуляръ $O'M$, затѣмъ проводимъ $MN \perp OX$ и откладываемъ $MN = NM'$, наконецъ проводимъ $M'P \perp OM$. Точка P принадлежитъ искомому мѣсту.



Черт. 21.

$$OM = a\cos\theta,\ ON = OM.\cos\theta = a\cos^2\theta;$$
$$MN = ON \operatorname{tg}\theta = a\sin\theta\cos\theta;$$
$$MM' = a\sin 2\theta,\ PM = a\sin 2\theta . \sin\theta,$$
$$r = OM - PM = a\cos\theta - a\sin\theta . \sin 2\theta$$

или

$$r = a\cos\theta\,(1 - 2\sin^2\theta)$$
$$r^4 = ar\cos\theta\,(r^2 - 2r^2\sin^2\theta)$$
$$(x^2 + y^2)^2 = ax\,(x^2 - y^2).$$

Эта кривая въ началѣ координатъ имѣетъ *тройную* точку.

Если кривая задана уравненіемъ въ параметрической формѣ, то ея особенныя точки могутъ быть получены двоякимъ образомъ.

1) Угловой коэффиціентъ касательной въ особенной точкѣ пріобрѣтаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$ $\left(\text{или } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Но

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}.$$

Слѣд., должно быть

$$\frac{dx}{dt} = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Примѣръ: циклоида $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Равенства

$$x' = a(1 - \cos t) = 0, \quad y' = a\sin t = 0$$

удовлетворяются при

$$t = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Для $\frac{dy}{dx}$ получимъ истинное значеніе по извѣстнымъ правиламъ

$$\text{пред.}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{пред.}\ \frac{y''}{x''} = \text{пред.}\ \frac{\cos t}{\sin t}$$

При этихъ значеніяхъ $\frac{dy}{dx}$ обращается въ ∞, но $\frac{dx}{dy}$ имѣетъ опредѣленное значеніе 0. Касательная одна. Это точка возврата.

2) При двухъ значеніяхъ параметра могутъ получиться одинаковыя значенія координатъ.

Примѣръ: прямой трилистникъ, если положить $y = tx$ выразится уравненіями:

$$x = \frac{a(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2},\quad y = \frac{at(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}.$$

Точка $x=0$, $y=0$ получается a) при $t=1$, b) при $t=-1$, чему соотвѣтствуютъ и два значенія

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=2\frac{1-6t^2+t^4}{(t^2-3)t}$$

Именно

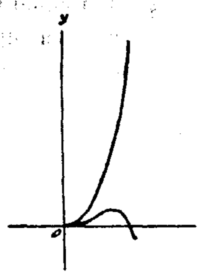
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{-1}=-4,\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{+1}=+4.$$

§ 11. Точка возврата второго рода. Точки возврата, примѣры которыхъ приведены выше, всѣ таковы, что сходящіяся въ этой точкѣ вѣтви кривой лежатъ по обѣ стороны общей касательной. Это *точки возврата перваго рода* (рогообразныя). Но есть еще *точки возврата 2-го рода* (клювообразныя),— когда вблизи этой точки обѣ вѣтви кривой лежатъ по одну сторону общей касательной. Такую особенность представляетъ кривая $m(ay-x^2)^2-x^5=0$ $(a>0$ и $m>0)$

Это точка *двойная*, ибо

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0=2am \neq 0$$

для $(0, 0)$; уравненіе пары касательныхъ $2amY^2=0$ вдвойнѣ взятая ось x-овъ. Рѣшивъ же уравненіе относительно y имѣемъ:



Черт. 23.

$$ay=x^2\pm\frac{x^{5/2}}{\sqrt{m}}=x^2\left(1\pm\sqrt{\frac{x}{m}}\right).$$

При $0<x<m$ оба значенія $y>0$: обѣ вѣтви лежатъ выше общей касательной оси OX.

§ 12. Кривая 3-го порядка, имѣющая особенную точку, есть уникурсальная. Каждая особенная точка алгебраической кривой, как показалъ Cayley, можетъ быть разсматриваема, какъ эквивалентная извѣстному число простыхъ особенныхъ точекъ (узелъ, точка возврата и пр. Число ихъ не можетъ превышать извѣстнаго предѣла $=\frac{(m-1)(m-2)}{1\,.\,2}$ для кривой m-го порядка. Разность между $\frac{(m-1)(m-1)}{2}$ и дѣйствительнымъ числомъ особенныхъ точекъ называется *родомъ* кривой. Кривыя 0-го рода суть уникурсальныя (ихъ координаты могутъ быть выражены *раціонально* черезъ нѣкоторый параметръ). Покажемъ это на кривыхъ 3-го порядка. Для нихъ наибольшее возможное число особенныхъ точекъ равно 1. Пусть кривая 3-го порядка имѣетъ особенную точку

Тогда принявъ ее за начало координатъ, приведемъ уравненіе къ виду $\varphi_3(x, y)+\varphi_2(x, y)=0$ гдѣ φ_3 и φ_2 однородные многочлены 3-ей и 2-ой степени. Положимъ $y=tx$. Въ силу однородности φ_3 и φ_2 получимъ

$$x^3\varphi_3(1, t)+x^2\varphi_2(1, t)=0$$

отсюда

$$x=-\frac{\varphi_2(1, t)}{\varphi_3(1, t)} \quad \text{а} \quad y=-\frac{t\varphi_2(1, t)}{\varphi_3(1, t)}, \text{ г. и т. д.}$$

Примѣръ: кривая $x^3+y^3-3axy=0$ наз. *листомъ Декарта*. Точка $(0, 0)$ есть ея узелъ. Полагая $y=tx$ найдемъ

$$x=+\frac{3at}{1+t^3}, \quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

§ 13. Особенныя точки трансцендентныхъ кривыхъ. Трансцендентныя кривыя представляютъ значительно большее разнообразіе особенностей, чѣмъ алгебраическія.

Во первыхъ, *число* ихъ особенныхъ точекъ можетъ быть *безконечно велико*. Напримѣръ, циклоида

$$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t).$$

Каждая точка на оси x-овъ есть особенная: точка возврата. Дѣйствительно, условіе особенной точки $x'=0$ $y'=0$ даетъ $\sin t=0$, $1-\cos t=0$, что удовлетворяется при $t=2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Соотвѣтственное значеніе для углового коэффиціента найдемъ по общему правилу

$$\lim\left(\frac{dy}{dx}\right)=\lim\left(\frac{\sin t}{1-\text{cs}\, t}\right)=\lim\frac{\cos t}{\sin t}=\infty.$$

Но

$$\lim\left(\frac{dx}{dy}\right)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x=\pm 2k\pi}\left(x-y\frac{dx}{dy}\right)=\lim a(t-\operatorname{tng} t)=-2k\pi a,$$

такъ что касательныя будутъ: $X=\pm 2k\pi$.

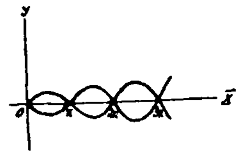
2) Кривая $y^2-x\sin^2 x=0$ имѣетъ въ каждой точкѣ $(y=0, x=k\pi)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ особенную точку при $x=k\pi$

$$(F'_x)=(-\sin^2 x-2x\sin x\cos x)=0, (F'_y)=(2y)=0.$$

При томъ такъ какъ при $x=k\pi$

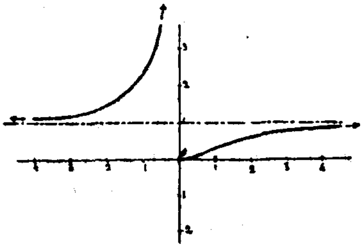
$$(F''_{x^2})=-2k\pi, F''_{xy}=0, F''_{y^2}=2,$$

уравненіе касательныхъ $2y^2 - 2k\pi = 0$; откуда $y' = \pm\sqrt{k\pi}$ — имѣетъ два вещественныхъ значенія при $k > 0$, равныя значенія при $k = 0$ и мнимыя при $k < 0$; и слѣдовательно точка $(0, k\pi)$ будетъ уединенной при $k < 0$, точкою возврата при $k = 0$ и узломъ при $k > 0$.



Черт. 24.

Но сверхъ того трансцендентныя кривыя представляютъ и такіе типы особенныхъ точекъ, какихъ совсѣмъ нѣтъ у алгебраическихъ кривыхъ.



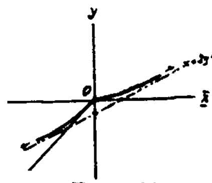
Черт. 25.

Таковы

a) **Точка прерыва** (или лучше пресѣченія): вѣтвь кривой оканчивается въ точкѣ. Примѣръ такой особенности представляетъ кривая $y = e^{-\frac{1}{x}}$: одна изъ вѣтвей (соотвѣт. $x \geqq 0$) оканчивается въ точкѣ $(x = 0, y = 0)$.

b) **Точка излома** (p. saillant): двѣ различныхъ касательныхъ, но каждая вѣтвь лежитъ, какъ въ точкѣ возврата, по одну сторону нормали; аналитически это значитъ, что $\lim \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ различенъ для h положительнаго и для h отрицательнаго; говоримъ: правая и лѣвая производныя различны. Такъ, если

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \text{ то } f(0) = 0.$$



Черт. 26.

$$\frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\varepsilon}}}; \quad \lim_{+0} = \frac{1}{1 + \infty} = 0;$$

$$\lim_{-0} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

Подобнымъ образомъ, если возьмемъ

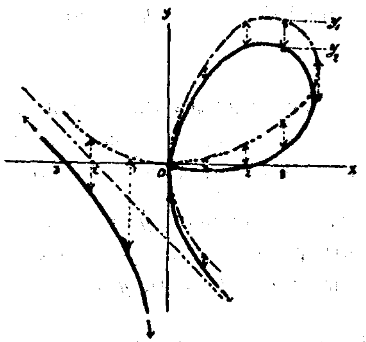
$$y = x \, . \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right), \text{ то } f(0) = 0, \ f(\varepsilon) = \varepsilon \, . \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \therefore \frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

и потому

$$\lim_{\varepsilon = +0} \frac{f(\varepsilon) - (0)}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{а} \quad \lim_{\varepsilon = -0} \frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon} = -\frac{\pi}{2}.$$

γ) **Точка раздвоенія** (указанная физикомъ Plateau),—гдѣ вѣтвь кривой раздвояется. Для того, чтобы получить примѣръ, можно къ y въ уравненіи кривой, имѣющей двойную точку, придать, напримѣръ: $e^{-\frac{1}{x}}$. Такъ сдѣлаемъ съ декартовымъ листомъ, получимъ:

$$x^3+\left(y+e^{-\frac{1}{x}}\right)^3-3ax\left(y+e^{-\frac{1}{x}}\right)=0.$$



Черт. 27.

Пусть ордината для декартоваго листа y_1, а для $y=e^{-\frac{1}{x}}$ пусть ордината y_2, тогда $y=y_1-y_2$. Вблизи начала вѣтвь, соотвѣтствующая отрицательнымъ x, удаляется въ безконечность. На чертежѣ пунктиромъ начерченъ листъ Декарта, сплошною—2-я кривая съ точкою раздвоенія въ началѣ координатъ.

---

§ 14. Асимптоты. Если двѣ кривыя $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ таковы, что разстояніе между точками ихъ безпредѣльно убываетъ по мѣрѣ удаленія по уходящимъ въ безконечность ихъ вѣтвямъ, то говорятъ, что одна кривая *асимптотически* приближается къ другой. Считая разстоянія по ординатамъ, выразимъ аналитически условіе асимптотическаго приближенія

$$\lim_{x=\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0 \qquad (1)$$

Если одна изъ взятыхъ линій—прямая (т. е. напр. $\varphi(x)\equiv mx+h$), такъ что

$$\lim_{x=\infty}[f(x)-mx-h]=0 \qquad (2)$$

она называется *прямолинейною асимптотою* или просто *асимптотою* для кривой $y=f(x)$.

Если кривая $y=f(x)$ имѣетъ вѣтви, уходящія въ безконечность (таковы, напримѣръ, алгебраическія кривыя нечетнаго порядка), то можно поставить задачу разысканія ея асимптоты.

По извѣстному свойству предѣловъ:

$$\lim_{x=\infty}(y-mx-h)=\lim_{x=\infty}(y-mx)-h.$$

Такимъ образомъ свободный членъ въ уравненіи асимптоты опредѣлится изъ равенства

$$h = \lim_{x=\infty} (y - mx). \tag{3}$$

Но

$$\lim_{x=\infty} (y - mx) = \lim_{x=\infty} x\left(\frac{y}{x} - m\right).$$

Чтобы этотъ предѣлъ былъ величина конечная, второй множитель долженъ имѣть предѣлъ, равный нулю,—т. е.

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{y}{x}\right) = m. \tag{4}$$

Итакъ прежде всего находимъ угловой коэффиціентъ асимптоты по (4), а затѣмъ подставляя найденное значеніе m въ (3), находимъ h.

Примѣръ 1. Кривая $y = b.e^{-\frac{x}{a}}$ имѣетъ вѣтвь, уходящую въ безконечность при возрастающихъ x $(a > 0)$. Ищемъ:

$$\lim_{x=\infty} \frac{be^{\frac{x}{a}}}{x} = -\frac{b}{a}\left(\lim \frac{e^{-\frac{x}{a}}}{1}\right) = 0$$

и слѣдовательно,

$$h = \lim (y - 0.x) = \lim be^{-\frac{x}{a}} = 0;$$

такимъ образомъ асимптотою будетъ ось x-овъ.

Примѣръ 2. Кривая $y = b.\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$ имѣетъ рядъ безконечныхъ вѣтвей;

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{y}{x}\right) = \frac{b}{a} \lim_{x=\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

Числитель $= \frac{2k+1}{2}\pi$ — величина конечная, слѣдовательно,

$$m = 0; \quad h = \lim_{x=\infty} y = b.\lim_{x=\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) = (2k+1)\frac{\pi}{2}b.$$

Такимъ образомъ асимптотами является рядъ параллельныхъ оси x-овъ прямыхъ

$$y = \frac{(2k+1)\pi}{2} b \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Замѣтимъ, что по правилу нахожденія истиннаго значенія неопредѣленныхъ выраженій

$$m = \lim_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{x=\infty}\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{5}$$

т. е. направленіе асимптоты совпадаетъ съ направленіемъ, которое соотвѣтствуетъ предѣльному значенію, принимаемому угловымъ коэффиціентомъ касательной, когда x и y обращаются въ ∞.

Но касательная въ безконечно-удаленной точкѣ получится, если въ уравненіи

$$Y = \left(\frac{dy}{dx}\right) X + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$$

перейдемъ къ предѣлу $x = \infty$, — т. е. если

$$\lim \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\infty} = m\ (5) \text{ и } \lim_{x=\infty}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = h \tag{6}$$

то

$$Y = mX + h$$

будетъ касательной въ безконечно-удаленной точкѣ. Но выше мы имѣли, что для асимптоты

$$h = \lim_{x=\infty}(y - mx) = \lim_{x=\infty}\left(y - x\ .\ \lim_{x=\infty}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right). \tag{7}$$

Итакъ если предѣлы (6) и (7) совпадаютъ, асимптота и есть касательная въ безконечно-удаленной точкѣ.

Но первое опредѣленіе нѣсколько болѣе общее: касательной въ безконечно-удаленной точкѣ можетъ и не существовать, и кривая тѣмъ не менѣе можетъ имѣть прямолинейную асимптоту.

Возьмемъ кривую $y = \frac{\cos x}{x}$. Для нея асимптота существуетъ въ первомъ смыслѣ, — ибо

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{x=\infty}\frac{\cos x}{x^2} = 0$$

и

$$\lim_{x=\infty}(y - 0\ .\ x) = \lim_{x=\infty}\frac{\cos x}{x} = 0$$

асимптотою служитъ ось x-овъ, около которой кривая представляетъ такъ сказать рядъ затухающихъ колебаній, — амплитуда которыхъ убываетъ съ возрастаніемъ абсолютной величины x,—и которыя заключены между вѣтвями гиперболъ

$$y=\frac{1}{x} \text{ и } y=-\frac{1}{x}.$$

Въ тоже время касательной опредѣленной въ безконечно удаленной точкѣ кривая не имѣетъ: хотя

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\lim_{x=\infty}\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}=0$$

но

$$y-x\frac{dy}{dx}=2\frac{\cos x}{x}+\sin x$$

не имѣетъ для $x=\infty$ опредѣленнаго предѣла,—ибо $\lim\limits_{x=\infty}\frac{\cos x}{x}=0$, но $\sin x$ для $x=\infty$ величина неопредѣленная между -1 и $+1$.

§ 15. Асимптоты алгебраическихъ кривыхъ. Если кривая дана *алгебраическая*, то ея асимптоты опредѣляются слѣдующимъ образомъ. Какъ упомянуто выше, для асимптоты и для кривой $\lim\limits_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}\right)$ долженъ быть одинаковъ. Но уравненіе кривой можетъ быть написано

$$0=F(x,\ y)=F_n(x,\ y)+F_{n-1}(x,\ y)+\ldots+F_1(x,\ y)+F_0,$$

гдѣ $F_k(x,\ y)$ однородный относительно x и y многочленъ степени k, и слѣдовательно

$$F_k(x,\ y)=x^kF_k\left(1,\ \frac{y}{x}\right)=x^k\varphi_k\left(\frac{y}{x}\right)$$

такъ что уравненіе кривой приметъ видъ:

$$0=x^n\varphi_n\left(\frac{y}{x}\right)+x^{n-1}\varphi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots+x\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)+\varphi_0 \tag{8}$$

Раздѣляя на x^n имѣемъ

$$0=\varphi_n\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\varphi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots+\frac{1}{x^{n-1}}\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^n}\varphi_0 \tag{8'}$$

Полагая здѣсь $x=\infty$ и означая $\lim\limits_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}\right)=m$, приходимъ къ уравненію для m:

$$0=\varphi_n(m) \tag{9}$$

Для опредѣленія коэффиціента h асимптоты замѣтимъ, что по ея уравненію

$$\frac{y}{x} = m + \frac{h}{x}.$$

Подставляя это значеніе въ (8) и раскладывая $\varphi_k\left(m + \frac{h}{x}\right)$ по степенямъ приращенія $\frac{h}{x}$, найдемъ:

$$\begin{aligned} 0 &= x^n\varphi_n(m) + x^{n-1}[h\varphi'_n(m) + \varphi_{n-1}(m)] + \\ (10) \qquad &+ x^{n-2}\left[\frac{h^2}{1.2}\varphi''_n(m) + h\varphi'_{n-1}(m) + \varphi_{n-1}(m)\right] + \ldots + \varphi_0. \end{aligned}$$

Подставимъ вмѣсто m одинъ изъ корней уравненія (9). Тогда въ силу (9), по раздѣленіи на x^{n-1} (10) приметъ видъ

$$\begin{aligned} 0 = [h\varphi'_n(m) + \varphi_{n-1}(m)] + \frac{1}{x}\left[\frac{h^2}{1.2}\varphi''_n(m) + h\varphi'_{n-1}(m) + \varphi_{n-2}(m)\right] + \\ + \frac{1}{x^2}\left[\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''_n(m) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''_{n-1}(m) + h\varphi'_{n-2}(m) + \varphi_{n-3}(m)\right] + \ldots + \frac{1}{x^n}\varphi_0. \end{aligned}$$

Переходя къ предѣлу: $x = \infty$, получимъ уравненіе для опредѣленія h:

$$h\varphi'_n(m) + \varphi_{n-1}(m) = 0 \therefore h = -\frac{\varphi_{n-1}(m)}{\varphi'_n(m)}$$

Такимъ образомъ найдемъ для каждаго вещественнаго корня (9) соотвѣтственное значеніе h. Если корень m двойной, и при этомъ $\varphi_{n-1}(m) \neq 0$, то асимптоты не существуетъ. Если же для этого двойного корня и $\varphi_{n-1}(m) = 0$, то для опредѣленія h обращаемся къ слѣдующему уравненію

$$\frac{h^2}{1.2}\varphi''_n(m) + h\varphi'_{n-1}(m) + \varphi_{n-2}(m) = 0$$

и т. д.

Примѣръ 3. Листъ Декарта: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Здѣсь $n = 3$. $\varphi_3(m) \equiv 1 + m^3 = 0$ имѣетъ одинъ вещественный корень $m = -1$. Соотвѣтственное значеніе $h = -\frac{-3am}{3m^2} = -a$. Итакъ асимптота:

$$y + x + a = 0.$$

4. Кривая $2y^5 - 5xy^2 + x^5 = 0$ даетъ: $\varphi_5(m) = 2m^5 + 1 = 0$, единственный вещественный корень котораго $m = -\frac{1}{2^{1/5}}$; $\varphi_4(m) \equiv 0$ и слѣд., $h = 0$, такъ что асимптота: $y = -\frac{1}{2^{1/5}} . x$.

§ 16. Асимптоты, параллельныя оси y-овъ. Предыдущій разборъ не коснулся того случая, когда асимптотою является прямая, параллельная оси y-овъ,—ибо въ этомъ случаѣ ея уравненіе не можетъ быть написано въ видѣ $y = mx + h$. Для распознаванія такихъ асимптотъ надо прибѣгнуть къ уравненію

$$x = ny + k$$

и искать

$$\lim_{y=\infty}\left(\frac{x}{y}\right) = n \quad \text{и} \quad k = \lim_{y=\infty}(x - ny).$$

Такъ для кривой $y = \frac{\cos x}{x}$ находимъ

$$\lim_{y=\infty}\left(\frac{x}{y}\right) = \lim_{y=\infty}\left(\frac{\cos x}{y^2}\right) = 0$$

и

$$k = \lim_{y=\infty}\left(\frac{\cos x}{y}\right) = 0,$$

такъ что ось y-овъ будетъ такою асимптотою.

Для алгебраическихъ кривыхъ, которыя можно изобразить уравненіемъ

$$y^n\psi(x) + y^{n-1}\psi_1(x) + \ldots + \psi_n(x) = 0, \tag{11}$$

подобныя асимптоты опредѣлятся изъ уравненія

$$\psi(x) = 0, \tag{12}$$

ибо какъ извѣстно изъ алгебры, если въ уравненіи n-ой степени, коэффиціентъ при высшей степени неизвѣстнаго обращается въ 0, одинъ изъ корней уравненія обращается въ безконечность и такимъ образомъ безконечно удаленная точка каждой изъ прямыхъ (12) будетъ принадлежать кривой (11).

Примѣръ 5. Циссоида Діоклеса: $x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$ даетъ $\psi(x) \equiv x - 2a$ и слѣдовательно $x - 2a = 0$ будетъ асимптотою.

6. Спутница циссоиды $y^2(x - 2a) + x^3 - 4ax^2 = 0$ также имѣетъ асимптоту $x - 2a = 0$.

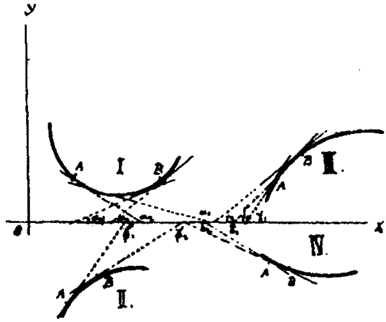
7. Строфоида: $y^2(x-2a)+x(x-a)^2=0$ также $x-2a=0$.

8. Конхоида $y^2(x-a)^2+x^2[(x-a)^2-b^2]=0$ имѣетъ асимптоту $x-a=0$.

§ 17. Асимптотическія точки. Кривая можетъ приближаться безпредѣльно и къ точкѣ, дѣлая около нея безчисленное количество все стягивающихся оборотовъ. Примѣры подобнаго рода точекъ удобнѣе всего получить въ кривыхъ, заданныхъ уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ.

Такъ полюсъ будетъ асимптотическою точкою для *гиперболической* спирали $(r.\theta=a)$, для Lituus Cotes'a $(r^2\theta=a)$, для кохлеоиды $r=a\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$ и т. д.

§ 18. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба. Кривая $y=f(x)$ можетъ обращать къ прямой линіи или выпуклую сторону свою или вогнутую. Разсмотримъ аналитическіе признаки выпуклости по отношенію къ оси x-овъ.



Черт. 28.

1. Пусть $y>0$. Если дуга AB обращена къ оси OX выпуклостью, то угловой коэффиціентъ касательной, т. е. $\frac{dy}{dx}=f'(x)$, при переходѣ отъ A къ B *возрастаетъ*, переходя отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ. Слѣд., $y''=f''(x)>0$ въ тѣхъ же предѣлахъ. Кривая отдѣляется касательною отъ оси x-овъ.

2. Пусть $y<0$: кривая обращена къ оси OX выпуклостью, но лежитъ ниже ея. При переходѣ отъ A къ B y' убываетъ, переходя отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ, слѣдовательно, $y''<0$.

Въ обоихъ случаяхъ

$$y\,.\,y''>0. \qquad (1)$$

Касательная въ обоихъ случаяхъ отдѣляетъ кривую отъ оси x-овъ. Если же кривая обращена къ оси OX вогнутостью, то наоборотъ при $y>0$ y' убываетъ и слѣдовательно $y''<0$, при $y<0$ y' возрастаетъ и слѣдовательно $y''>0$, такъ что

$$yy''<0. \qquad (2)$$

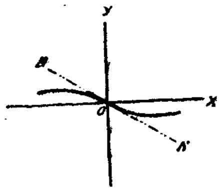
Кривая лежитъ между касательной и осью x-овъ.

Если бы опредѣляли выпуклость или вогнутость относительно положительнаго (или отрицательнаго) направленія оси OY, напримѣръ, то надо было бы обращать вниманіе только на знакъ y'',— которая въ одинаковыхъ съ этой стороны случаяхъ 1^0 и 4^0 удовлетворяетъ неравенству: $y''>0$, а въ случаяхъ 2^0 и 3^0 напротивъ $y''<0$.

Точки, служащія границею между выпуклыми и вогнутыми (относительно оси OX или положительнаго направленія оси OY) частями кривой, должны поэтому характеризоваться условіемъ

$$y''=0. \tag{3}$$

Такія точки называются *точками перегиба.* Въ нихъ кривая переходитъ съ одной стороны касательной на другую.



Черт. 29.

Примѣръ 1. Кубическая парабола $a^2y=x(x^2-b^2)$ имѣетъ въ началѣ координатъ точку перегиба; ибо $a^2y'=3x^2-b^2\neq 0$, а $y''=\frac{6x}{a^2}$ обращается въ 0 при $x=0$.

2. Parabola campaniformis cum ovali $ay^2=x\,(x^2-a^2)$ имѣетъ двѣ точки перегиба на безконечной вѣтви, которыя найдемъ такъ: беремъ производныя: $2ayy'=$ $=3x^2-a^2$, $2ay'^2+2ayy''=6x$.

Условіе $y''=0$ даетъ $ay'^2=3x \therefore y'=\left(\frac{3x}{a}\right)^{1/2}$ и слѣдовательно $2ay\sqrt{\frac{3x}{a}}=3x^2-a^2$; исключая y съ помощью уравненія кривой, получимъ для x биквадратное уравненіе

$$12x^2(x^2-a^2)=(3x^2-a^2)^2 \quad \text{или} \quad 3x^4-6a^2x^2-a^4=0.$$

Отсюда

$$x^2=a^2\pm\sqrt{\frac{4a^4}{3}}=a^2\left(1\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

или

$$x=a\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}},$$

отбрасывая мнимые и отрицательные корни; соотвѣтственно

$$y^2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3^3}}a^2\,(1+\sqrt{3}).$$

Когда кривая задана уравненіемъ, не рѣшеннымъ относительно $F(x,\,y)=0$, то удобно представить условіе $y''=0$ въ иномъ вид[illegible] Первая и вторая производныя (полныя) по x отъ лѣвой части уравне[illegible] нія, приравненныя 0, даютъ съ помощью $y''=0$

$$F'_x+y'F'_y=0,\; F''_{x^2}+2y'F''_{xy}+y'^2F''_{y^2}=0.$$

Исключая отсюда y', получаемъ искомое соотношеніе, которому должны удовлетворять точки перегиба. Оно можетъ быть написано:

$$F''_{x^2}.(F'_y)^2 - 2F''_{xy}.F'_y.F'_x + F''_{y^2}.(F'_x)^2 = 0$$

если предположить $(F'_y)^{-2} \neq 0$.

Въ видѣ опредѣлителя это условіе напишется:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} F''_{x^2} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{y^2} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

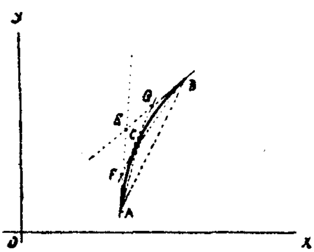
Это уравненіе степени $3n-4$, но подобно тому какъ степень уравненія касательной относительно координатъ точки прикосновенія можетъ быть понижена съ помощью уравненія кривой, и здѣсь можно понизить съ помощью (4) степень (5) на 2, замѣняя F'_x и F'_y черезъ $\frac{1}{m-1}[(m-1)F'_x - xF''_{x^2} - yF''_{xy}]$ и $\frac{1}{m-1}[(m-1)F'_y - xF''_{xy} - yF''_{y^2}]$ такъ что останется уравненіе степени $3(n-2)$.

Такимъ образомъ *число точекъ перегиба кривой порядка n равно вообще говоря* $3n(n-2)$.

Но (5) удовлетворяется координатами особенной точки, которая не будетъ вообще говоря точкою перегиба, и можно показать, что если кривая имѣетъ d двойныхъ точекъ и r точекъ возврата, то число ея точекъ перегиба равно

$$3n(n-2) - 6d - 8r.$$

§ 19. Длина дуги плоской кривой. Элементъ дуги. Понятіе о длинѣ дуги нѣкоторой кривой можно получить, если представить себѣ гибкую нерастяжимую нить, которая приняла форму нѣкоторой кривой линіи. Тогда натянувъ эту нить получимъ прямую, длина которой и представитъ длину дуги. Поэтому и вообще опредѣленіе длины дуги называется ея *выпрямленіемъ*.



Черт. 30.

Опредѣленіе длины дугъ кривыхъ относится собственно къ интегральному исчисленію, здѣсь надо дать только представленіе о немъ.

Пусть AB дуга кривой $y = f(x)$ (1) не содержащая особенныхъ точекъ и точекъ перегиба и имѣющая въ каждой точкѣ опредѣленную касательную. Проведя въ концахъ дуги касательныя, получимъ ломанную AEB, а соединяя концы прямою,—хорду AB. Очевидно,

$$\overline{AB} < \overline{AE} + \overline{EB}.$$

Возьмемъ между A и B на дугѣ точку C, и соединимъ ее прямыми съ A и съ B. Тогда ломанная ACB болѣе прямой AB, но какъ объемлемая менѣе AEB, т. е.

$$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB} < \overline{AE} + \overline{EB}.$$

Подраздѣляя снова дуги AC и CB и точки дѣленія соединяя съ A и C, съ C и B получимъ новую ломанную, периметръ которой будетъ больше периметра предыдущей ломанной и меньше $AE + EB$.

Продолжая эту операцію далѣе и измѣряя каждый разъ периметръ ломанныхъ, мы получаемъ безконечный рядъ чиселъ

$$s_0 = \overline{AB}, \quad s_1 = \overline{AC} + \overline{CB}, \ldots$$

возрастающихъ, но остающихся меньше постояннаго числа, выражающаго мѣру $\overline{AE} + \overline{EB}$. Этотъ рядъ чиселъ долженъ имѣть предѣлъ, который и называется *длиною дуги* AB.

Послѣдняя представится при этомъ, какъ предѣлъ периметра вписаннаго многоугольника, число сторонъ котораго безпредѣльно возрастаетъ, и каждая сторона безпредѣльно уменьшается. Отдѣльная сторона, отдѣльное слагаемое этой суммы и называется элементомъ дуги и обозначается ds. Если принять, что концы этой безконечно-малой хорды имѣютъ координаты, отличающіяся на dx и dy, то

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Если взять начало A дуги опредѣленное, а конецъ B измѣнять, то будетъ измѣняться и длина дуги:

$$s = \Phi(x) \tag{3}$$

и стало быть обратно x, а слѣдовательно по уравненію кривой и y можно разсматривать, какъ функцію длины дуги s; такой выборъ вспомогательнаго независимаго перемѣннаго иногда оказывается весьма полезнымъ.

Что касается до самаго опредѣленія вида функціи $\Phi(x)$ въ зависимости отъ (1), то это относится къ области интегральнаго исчисленія. Здѣсь достаточно сказать, что въ силу (2) $\Phi(x)$ такова, что

$$d\Phi(x) = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

или

$$\Phi'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{4}$$

Съ помощью этой послѣдней формулы можно разрѣшить вопросъ, имѣющій значеніе въ геодезіи при вычисленіи длины пологихъ дугъ.

§ 20. Разность между дугою и хордою для конечныхъ дугъ. Если x абсцисса начала A дуги, а $x+\Delta x$ — конца ея B, то длина дуги

$$= \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x),$$

а хорда

$$AB = l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Но по строкѣ Taylor'а

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \Phi'(x)\,\Delta x + \tfrac{1}{2}\,\Phi''(x)\,\Delta x^2 + \tfrac{1}{6}\,\Phi'''(x)\,\Delta x^3 \ldots$$

(мы ограничимся въ дальнѣйшемъ 3-ею степенью Δx). Притомъ

$$\Phi'(x) = \sqrt{1+y'^2};\ \text{отсюда}\ \Phi''(x) = \frac{y'\,y''}{\sqrt{1+y'^2}};\ \Phi'''(x) = \frac{y''^2 + y'\,y'''(1+y'^2)}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

съ другой стороны

$$\Delta y = y'\Delta x + \tfrac{1}{2}\,y''\Delta x^2 + \tfrac{1}{6}\,y'''\Delta x^3 + \ldots$$

и слѣдовательно

$$l = \Delta x\sqrt{1+\left(y' + \tfrac{1}{2}\,y''\Delta x + \tfrac{1}{6}\,y'''\Delta x^2 + \ldots\right)^2};$$

въ разложеніи мы ограничимся также 3-ею степенью Δx, и потому можемъ писать:

$$l = \Delta x\left(1 + y'^2 + y'y''\Delta x + \left(\tfrac{1}{4}\,y''^2 + \tfrac{1}{3}\,y'y'''\right)\Delta x^2 + \ldots\right)^{1/2}$$

или если вынести $\sqrt{1+y'^2}$ общимъ множителемъ

$$l = \Delta x\sqrt{1+y'^2}\left(1 + \Delta x\,\frac{y'\,y''}{1+y'^2} + \frac{1}{12}\,\Delta x^2\left(\frac{4y'y''' + 3y''^2}{1+y'^2}\right) + \ldots\right)^{1/2};$$

раскладывая выраженіе въ скобкахъ по формулѣ бинома, найдемъ

$$l = \Delta x.\sqrt{1+y'^2}\left[1+\frac{1}{2}\Delta x\left(\frac{y'\,y''}{1+y'^2}+\frac{1}{12}\Delta x\,\frac{4y'y'''+3y''^2}{1+y'^2}\right)-\frac{1}{8}\Delta x^2.\frac{y'^2y''^2}{(1+y'^2)^2}\right],$$

(остальные члены содержатъ Δx^3 и высшія степени Δx, и потому мы ихъ опускаемъ.

Такимъ образомъ

$$l = \Delta x.\sqrt{1+y'^2}+\frac{1}{2}\Delta x^2\frac{y'\,y''}{\sqrt{1+y'^2}}+\Delta x^3\left(\frac{1}{24}\,\frac{4y'\,y'''+3y''^2}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{1}{8}.\frac{y'^2\,y''^2}{(1+y'^2)^{3/2}}\right)$$

съ точностью до безконечно-малыхъ 3-го порядка включительно.

Взявъ разность, получимъ:

$$\Delta s - l = \left\{\frac{1}{6}.\frac{y''^2+y'y'''(1+y'^2)}{(1+y'^2)^{3/2}}-\frac{1}{24}.\frac{4y'y'''+3y''^2}{\sqrt{1+y'^2}}+\frac{1}{8}\frac{y'^2\,y''^2}{(1+y'^2)^{3/2}}\right\}\Delta x^3 =$$

$$= \frac{1}{24}\,\Delta x^3.\frac{y''^2}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

съ тою же точностью.

Такимъ образомъ эта разность есть величина 3-го порядка относительно Δx.

Эту формулу можно переписать, вводя радіусъ кривизны (см. § 22).

$$(\Delta s - l) = \frac{1}{24}(\Delta x)^3\,\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{R^2}$$

или замѣняя Δx на dx:

$$(\Delta s - l) = \frac{1}{24}\,\frac{ds^3}{R^2}.$$

§ 21. Элементъ дуги въ полярныхъ координатахъ. Если вернемся къ черт. 14 (стр. 16), то найдемъ

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NM'}^2$$

Но

$$MN = r\sin\Delta\theta,\quad M'N = r+\Delta r - r\cos\Delta\theta$$

или замѣняя $\sin\Delta\theta$ его разложеніемъ и $1-\cos\Delta\theta = 2\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}$,

получимъ:

$$MN = r\left(\Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{1.2.3}\right);\quad M'N = \Delta r + 2r.\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}.$$

Ограничиваясь степенями безконечныхъ малыхъ $\Delta\theta$ и Δr до 3-го порядка, получимъ:

$$\overline{MN'}^2 = (r.\Delta\theta)^2 + (\Delta r)^2.$$

или замѣняя безконечно-малыя величины ихъ главными частями

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2.$$

Къ тому же результату придемъ, замѣтивъ, что при

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

имѣемъ:

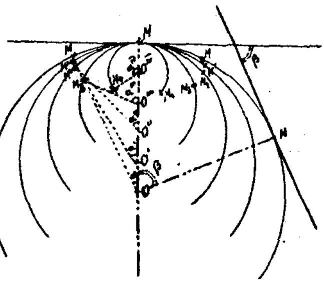
$$dx = -r\sin\theta d\theta + \cos\theta . dr$$

$$dy = r\cos\theta d\theta + \sin\theta dr.$$

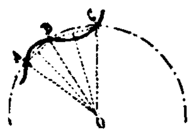
Возвышая въ квадратъ и складывая получимъ

$$dx^2 + dy^2 = d\theta^2 [r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta] + 2d\theta dr [-r\sin\theta . \cos\theta + r\cos\theta . \sin\theta] + \\ + dr^2 [\cos^2\theta + \sin^2\theta] = r^2 d\theta^2 + dr^2.$$

§ 22. Кривизна кривой. Радіусъ кривизны. Изъ круговъ, касательныхъ въ одной и той же точкѣ M къ нѣкоторой прямой, тотъ, который имѣетъ наибольшій радіусъ, примыкаетъ ближе къ прямой, и чѣмъ радіусъ меньше, тѣмъ рѣзче отклоненіе. Можно поэтому принять за мѣру кривизны дуги круга величину, обратную его радіусу. Такое опредѣленіе не можетъ быть однако непосредственно распространено на другія кривыя, не имѣющія ничего подобнаго радіусу круга. Можно, разумѣется, взявъ небольшую дугу кривой и три на ней точки $A, B, C,$ (черт. 32) провести черезъ нихъ дугу круга, и радіусъ этого круга можетъ до нѣкоторой степени характеризовать кривую. Но если сближать точки A, B, C, то радіусъ будетъ мѣняться, и тогда предѣльное его значеніе, когда A, B и C сольются, можно принимать за характерную для кривизны кривой величину.



Черт. 31.



Черт. 32.

Удобнѣе однако этотъ переходъ предѣлу совершить не прибѣгая первоначально къ кругу, проходящему черезъ три точки кривой. Обратимся снова къ черт. 31 и отъ точки M отложимъ одну и туже дугу s.

$(=\smile MM_1=\smile MM_2=\smile MM_3)$. Если α, α', α'' стягиваемые этими дугами центральные углы и r, r' r'' соотвѣтственные радіусы круговъ, то

$$s=\alpha r=\alpha' r'=\alpha'' r''\ldots$$

такъ что

$$\frac{1}{r}=\frac{\alpha}{s},\ \frac{1}{r'}=\frac{\alpha'}{s},\ \frac{1}{r''}=\frac{\alpha''}{s},$$

т. е. за мѣру кривизны можно принимать въ окружности отношеніе стягиваемаго дугою центральнаго угла къ длинѣ ея. Замѣтивъ, кромѣ того, что этотъ уголъ равенъ углу между касательными къ окружности въ концахъ дуги, можемъ принять за мѣру кривизны дуги круга *отношеніе угла между касательными въ концахъ дуги къ длинѣ ея.*

Послѣднее опредѣленіе непосредственно примѣнимо ко всякой кривой, имѣющей касательную, съ тою лишь разницею, что при измѣненіи величины дуги въ кругѣ, это отношеніе не мѣняется: оно постоянно обратно радіусу; у кривой же, отличной отъ круга, это отношеніе будетъ измѣняться съ измѣненіемъ величины дуги и ея положенія на кривой.

Черт. 33.

Поэтому отношеніе $\frac{\angle BCA'}{\smile BA}$ будемъ называть *средней мѣрою кривизны* дуги кривой AB, а *предѣлъ*, къ которому стремится это отношеніе, когда B стремится къ A *истинною мѣрою кривизны* (или просто *мѣрою кривизны*) *кривой* въ точкѣ A. Уголъ BCA' между касательными въ точкахъ A и B называется *угломъ смежности*. Итакъ *мѣрою кривизны кривой въ ея точкѣ A называется предѣлъ отношенія угла смежности BCA' къ длинѣ дуги AB, соотвѣтствующей этому углу.* Взявъ безконечно малую дугу кривой, можемъ замѣнить ее дифференціаломъ дуги ds, а уголъ смежности дифференціаломъ угла касательной къ кривой въ A съ осью x-овъ. Такимъ образомъ мѣра кривизны

$$K=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\,.\operatorname{arctg}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds}$$

или

$$K=\pm\frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\frac{\frac{d^2y}{dx^2}dx}{dx\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1}}=\pm\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Величина, обратная мѣрѣ кривизны, наз. радіусомъ кривизны. Какъ увидимъ, это есть именно радіусъ круга, проходящаго черезъ три безконечно-близкія точки кривой. Если кривая задана уравненіемъ въ параметрической формѣ, то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}$$

и слѣдовательно

$$R=\frac{1}{K}=\pm\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''}\qquad(3)$$

Если въ частности за независимое перемѣнное принята дуга, то

$$x_s'^2+y_s'^2=1 \quad \text{и} \quad x_s'x_s''+y_s'y_s''=0$$

поэтому

$$(x_s'y_s''-y_s'x_s'')^2\equiv(x_s'^2+y_s'^2)(x_s''^2+y_s''^2)-(x_s'x_s''+y_s'y_s'')^2=x_s''^2+y_s''^2$$

и (3) принимаетъ видъ

$$R=\frac{1}{\sqrt{x_s''^2+y_s''^2}}$$

Если кривая задана уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ $r=\varphi(\theta)$, то для нея уголъ смежности равенъ приращенію угла касательной съ полярной осью, который равенъ $(\theta+\psi)$, если θ — полярный уголъ и ψ уголъ касательной съ полярнымъ радіусомъ векторомъ. Поэтому:

$$R=\frac{ds}{d\theta+d\psi};\qquad ds=\sqrt{r^2d\theta^2+dr^2}=d\theta\sqrt{r^2+r'^2}$$

Но

$$d\psi=d\,.\,\mathrm{arctg}\left(\frac{r}{r'}\right)=\frac{r'^2-rr''}{r'^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2}d\theta=\frac{r'^2-rr''}{r^2+r'^2}d\theta$$

и такимъ образомъ

$$(2)\qquad R=\frac{d\theta\sqrt{r^2+r'^2}}{d\theta+d\theta\dfrac{r'^2-rr''}{r^2+r'^2}}=\frac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{r^2-rr''+2r'^2}.$$

§ 23. Примѣры. Понятіе о внутреннемъ (натуральномъ) уравненіи кривой.

Примѣръ 1. Радіусъ кривизны *эллипса* уравненіе эллипса возьмемъ въ параметрической формѣ:

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t.$$

Тогда:

$$x'^2+y'^2=a^2\sin^2t+b^2\cos^2t=b^2+(a^2-b^2)\sin^2t;\quad x'y''-y'x''=ab;$$

радіусъ кривизны имѣетъ наибольшее значеніе $\left(=\frac{a^2}{b}\right)$ въ вершинахъ, лежащихъ на малой оси $\left(t=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, и наименьшее $\left(=\frac{b^2}{a}\right)$ въ вершинахъ на большой оси ($t=0, \pi$). Сопоставляя выраженіе

$$R=\frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}$$

съ выраженіемъ для *нормали*

$$N=b\sin t\left(1+\left(\frac{b\cos t}{a\sin t}\right)^2\right)^{1/2}=\frac{b}{a}(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{1/2}$$

имѣемъ $R=\frac{a^2N^3}{b^4}$, или если ввести параметръ $p=\frac{b^2}{a}$ эллипса, $R=\frac{N^3}{p^2}$.

2) Цѣпная линія

$$y=a\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right).$$

Здѣсь

$$y'=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}),\quad 1+y'^2=\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^2;$$

отсюда $ds=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})dx$ и слѣдовательно, $s=a(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})+C$. Добавочная постоянная C равна 0, если примемъ за начало дугъ точку съ наименьшей ординатой ($x=0, s=0$);

$$R=a\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{x}{a}}}{2}\right)^2.$$

Сравнивая съ выраженіемъ для s, имѣемъ: $R=a+\frac{s^2}{a}$.

Подобныя соотношенія между радіусомъ кривизны и длиною дуги кривой, независящія отъ выбора системы координатъ, носятъ названіе *внутренняго уравненія* кривой (или натуральнаго-équation intrinsèque или natürliche Gleichung). Ср. книгу E. Cesàro Lezioni di geometria intrinseca. Мы приведемъ еще только нѣсколько примѣровъ.

3) Циклоида.

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t).$$

Составимъ

$$x'^2+y'^2=a^2[(1-\cos t)^2+\sin^2 t]=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

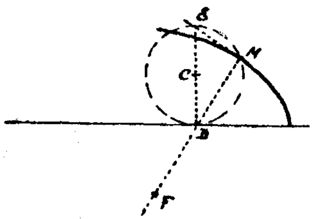
и

$$x'y''-y'x''=a^2[(1-\cos t)\cos t-\sin^2 t]=-a^2(1-\cos t)=-2a^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Такимъ образомъ

$$R = + \frac{\left(2a \sin\frac{t}{2}\right)^3}{2a^2 \sin^2\frac{t}{2}} = 4a \sin\frac{t}{2}.$$

Отсюда построеніе радіуса кривизны: соединивъ точку M циклоиды съ точкою прикосновенія D катящейся окружности и оси катанія, имѣемъ



Черт. 34.

$$MD = 2a \sin\frac{t}{2} \therefore R = 2\overline{MD} = MF.$$

Далѣе изъ

$$ds = + 2a \sin\frac{t}{2}\, dt$$

выводимъ

$$s = -4a \cos\frac{t}{2} + C$$

и $C = 4a$, если за начало дугъ примемъ низшую точку циклоиды ($s = 0$ при $t = 0$). Такимъ образомъ между s и R существуетъ зависимость

$$(s - 4a)^2 + R^2 = (4a)^2.$$

4) Для эпициклоиды

$$x = r(n+1)\cos u - r\cos(n+1)u; \quad y = r(n+1)\sin u + r\sin(n+1)u,$$

гдѣ r—радіусъ катящейся окружности, nr—неподвижной, находимъ

$$s = \frac{4r(n+1)}{n+2} \sin\left(\frac{n+2}{2}\right)u,$$

полагая, что при $u = 0$ и $s = 0$.

$$R = 4r\frac{n+1}{n} \cos\left(\frac{n+2}{2}\right)u.$$

Положивъ для простоты

$$\frac{4r(n+1)}{n+2} = b, \quad \frac{4(n+1)r}{n} = a,$$

найдемъ внутреннее уравненіе эпициклоиды $\frac{R^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1$. Случай $a = b = 4r$ соотвѣтствуетъ $n = \infty$—тогда получаемъ обыкновенную циклоиду.

5) Логариѳмическая спираль $r = ae^{m\theta}$. Здѣсь $r' = mr$, $r'' = m^2 r$, поэтому $R = r\sqrt{1+m^2}$. При этомъ $\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{r'} = \frac{1}{m}$ и слѣд., $\psi = \text{Const}$,

$R = r : \sin \psi$; такъ какъ притомъ $ds = d\theta . r\sqrt{1+m^2}$, то считая начало дугъ отъ $\theta = 0$ получимъ $s = \frac{r\sqrt{1+m^2}}{m}$, т. е. $R = ms$ будетъ внутреннее уравненіе логариѳмической спирали.

Значеніе внутренняго уравненія кривой видно изъ слѣдующаго предложенія: *для того, чтобы двѣ кривыя могли быть совмѣщены путемъ перемѣщенія* (какъ неизмѣняемыя системы), *онѣ должны имѣть одно и тоже внутреннее уравненіе*,—ибо при всѣхъ подобныхъ перемѣщеніяхъ и радіусъ кривизны и дуга остаются безъ измѣненія.

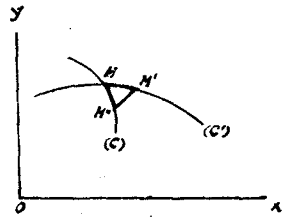
S. Lie показалъ далѣе, что всѣ дифференціальные инваріанты группы движеній плоскости (т. е. функціи отъ x, $y, \frac{dy}{dx} \ldots$, которыя не измѣняются при всевозможныхъ перемѣщеніяхъ кривой въ ея плоскости) выражаются черезъ

$$R, \frac{dR}{ds}, \quad \frac{d^2R}{ds^2}, \ldots$$

(Ср. *G. Scheffers*. Anwendung d. Differential- u. Integralrechnung auf Geometrie B. I. Ab. I § 8).

§ 24. Прикосновеніе плоскихъ кривыхъ.

Опредѣленіе. *Двѣ кривыя* (C) *и* (C') *имѣютъ въ общей точкѣ* M *прикосновеніе n-го порядка, если взявъ на одной точку* M' *въ сосѣдствѣ точки* M *и проведя черезъ нее произвольную прямую, не параллельную касательной въ* M *къ другой кривой, и встрѣчающую эту послѣднюю въ* M'', *получимъ, что разстояніе* $M'M''$ *порядка* $(n+1)$*-го относительно* MM'.



Черт. 35.

Чтобы получить аналитическій признакъ прикосновенія нѣкотораго n-го порядка, примемъ, что кривая (C) задана уравненіемъ $F(x, y) = 0$, а (C') уравненіями

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t)$$

и пусть M имѣетъ координаты $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, причемъ $F(x_0, y_0) = 0$.

Координаты M' пусть $x_1\, y_1$, соотвѣтствующія значенію $t = t_1$. Если $M'M'' = d$ и косинусы угловъ $M'M''$ съ осями означимъ λ, μ, то координаты точки $M'' : x = x_1 + \lambda d$, $y = y_1 + \mu . d$; онѣ удовлетворяютъ уравненію кривой (C):

$$F(x_1 + \lambda d, \; y_1 + \mu d) = 0.$$

Раскладывая по строкѣ Taylor'а, получимъ

$$(1) \qquad F(x_1, y_1) + d(\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1}) + d^2\Sigma = 0.$$

Точка (x_1, y_1) взята въ сосѣдствѣ точки (x_0, y_0), для которой $F(x_0, y_0) = 0$. Поэтому $F(x_1, y_1)$ величина малая, и $\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1}$ мало отличается отъ своей главной части $\lambda F'_{x_0} + \mu F'_{y_0}$, которую мы предположили неравною нулю; равенство (1) показываетъ, что низшіе члены, которые должны взаимно уничтожаться, получаются отъ $F(x_1, y_1)$ и отъ $d\ (\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1})$. Если гл. ч. $(\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1})$ не равна нулю, d и $F(x_1\ y_1)$ должны быть одного порядка. Но по опредѣленію d должно быть $(n+1)$-го порядка относительно $\overline{MM'} = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$, главная часть котораго есть $(t_1-t_0)\sqrt{x'^2_0+y'^2_0}$. Итакъ *для прикосновенія n-го порядка $F(x_1, y_1)$,—результатъ подстановки въ уравненіе кривой (C) координатъ точки кривой (C'), близкой къ общей точкѣ,—должно быть $(n+1)$-го порядка относительно разности t_1-t_0 значеній параметра, соотвѣтствующихъ точкамъ M и M'.*

Замѣтимъ, что $F(x_1, y_1) = F[\varphi(t_1), \psi(t_1)] = \Phi(t_1)$, что можно представить, замѣнивъ $t_1 = t_0 + (t_1 - t_0)$ и разложивъ по степенямъ $t_1 - t_0$:

$$\Phi[t_0+(t_1-t_0)] = \Phi(t_0) + \Phi'(t_0)(t_1-t_0) + \ldots + \Phi^{(n+1)}(t_0)\frac{(t_1-t_0)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \ldots$$

Для того, чтобы это выраженіе было порядка $n+1$ относительно $(t_1 - t_0)$, должны имѣть мѣсто равенства:

$$\Phi(t_0) = 0, \quad \Phi'(t_0) = 0, \ldots \quad \Phi^{(n)}(t_0) = 0.$$

Соприкосновеніе n-го порядка требуетъ выполненія $(n+1)$ условій.

Въ частномъ случаѣ, когда кривыя (C) и (C') заданы уравненіями вида $y = f(x)$, $y = g(x)$, можемъ привести одно къ параметрической формѣ положивъ $x = t$, и слѣд. $y = f(t)$, а 2-ое къ нерѣшенному виду: $y - g(x) = 0$ и тогда по предыдущему: для соприкосновенія n-го порядка должны быть выполнены условія:

$$f(x) - g(x) = 0, \ f'(x) - g'(x) = 0, \ldots \ f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x) = 0.$$

Замѣтимъ, что при *n четномъ* первый неуничтожающійся членъ *нечетнаго* порядка относительно Δx и, слѣдовательно, мѣняетъ знакъ вмѣстѣ съ Δx: при соприкосновеніи четнаго порядка кривыя пересѣкаютъ другъ друга, при соприкосновеніи нечетнаго порядка лежатъ по одну сторону одна другой.

Особенное значеніе имѣетъ—для изученія кривыхъ—вопросъ о нахожденіи для *данной* кривой, такой кривой *заданнаго типа*, которая имѣла бы съ нею въ извѣстной точкѣ соприкосновеніе возможно-высшаго порядка. Чтобы было возможно соприкосновеніе n-го порядка, уравненіе кривой, только *типъ* которой заданъ, должно содержать $n+1$ произвольныхъ коэффиціентовъ.

§ 25. Соприкасающаяся прямая—касательная. Уравненіе *прямой* содержитъ два коэффиціента. Наивысшее соприкосновеніе кривой съ прямою есть, вообще говоря, прикосновеніе 1-го порядка. Если дана кривая $y=f(x)$ и прямая $y=mx+k$, то для соприкосновенія перваго порядка, разность $f(x+\Delta x)-[m(x+\Delta x)+k]$ должна быть 2-го порядка относительно Δx; но

$$f(x+\Delta x)-m(x+\Delta x)-k\equiv f(x)-mx-k+\Delta x\,[f'(x)-m]+\frac{\Delta x^2}{1.2}f''(x)+\ldots,$$

слѣдовательно должно быть:

$$f'(x)=m$$

$$f(x)-mx-k=0,$$

или

$$k=f(x)-xf'(x).$$

Такимъ образомъ прямая искомая будетъ

$$Y=y'X+y-xy'$$

т. е. *касательная имѣетъ съ кривой соприкосновеніе перваго порядка.* Но если имѣемъ точку перегиба, то $y''=f''(x)=0$, и первый значущій членъ будетъ

$$\frac{\Delta x^3}{1.2.3}f'''(x);$$

такимъ образомъ *въ точкѣ перегиба* (если $f'''(x)\neq 0$) *кривая имѣетъ съ касательной прикосновеніе 2-го порядка.* Она стало быть переходитъ съ одной стороны касательной на другую.

§ 26. Соприкасающійся кругъ. Уравненіе круга содержитъ *три* произвольныхъ параметра—двѣ координаты центра и радіусъ. Поэтому кругъ можетъ имѣть съ кривой соприкосновеніе 2-го порядка. Пусть уравненіе кривой дано въ параметрической формѣ

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t). \tag{1}$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе окружности

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=r^2 \tag{2}$$

и дифференцируя два раза по t, получимъ

$$x'(x-\xi)+y'(y-\eta)=0 \tag{3}$$

$$x''(x-\xi)+y''(y-\eta)+x'^2+y'^2=0. \tag{4}$$

Первое показываетъ, что *центръ соприкасающагося круга лежитъ на нормали къ кривой*. Рѣшая (4) и (3) относительно $x-\xi$ и $y-\eta$ получимъ:

$$\xi-x=\frac{-y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''};\quad \eta-y=\frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''} \tag{5}$$

Подставляя во (2) получимъ:

$$r^2=\frac{(x'^2+y'^2)^3}{(x'y''-y'x'')^2},\quad \text{откуда } r=\pm\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{(x'y''-y'x'')}.$$

Такимъ образомъ *радіусъ соприкасающагося круга совпадаетъ съ радіусомъ кривизны*. Поэтому и называютъ также соприкасающійся кругъ *кругомъ кривизны* и центръ его—*центромъ кривизны*.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ:

1. *Кругъ кривизны пересѣкаетъ кривую въ точкѣ прикосновенія* (такъ какъ имѣетъ съ кривою соприкосновеніе четнаго порядка).

2. Если двѣ кривыя имѣютъ въ общей точкѣ прикосновеніе не ниже 2-го порядка, то онѣ имѣютъ въ этой точкѣ не только общую касательную, но и общій кругъ кривизны.

3. Въ точкѣ перегиба $y''=0$, y' не обращается, вообще говоря, въ безконечность, слѣдовательно, мѣра кривизны равна нулю, радіусъ кривизны обращается въ безконечность; *кругъ кривизны въ точкѣ перегиба обращается въ касательную въ этой точкѣ.*

4. *Въ точкѣ возврата радіусъ кривизны обращается въ* 0, *кругъ кривизны обращается въ точку—самую точку возврата.*

Дѣйствительно, для точки возврата выполняются одновременно уравненія

$$F(x,\ y)=0,\quad F'_x=0,\quad F'_y=0\quad \text{и}\quad F''^2_{xy}-F''_{x^2}F''_{y^2}=0.$$

Послѣднее показываетъ, что лѣвая часть уравненія для углового коэффиціента касательныхъ

$$F''_{x^2}+2F''_{xy}y'+F''_{y^2}y'^2=0$$

обращается въ точный квадратъ

$$\frac{1}{F''_{y^2}}(F''_{xy}+F''_{y^2}y')^2=0\qquad \text{или}\qquad \frac{1}{F''_{x^2}}(F''_{x^2}+F''_{xy}y')^2=0$$

Но y'' для двойной точки опредѣляется уравненіемъ

$$F'''_{x^3} + 3F'''_{x^2y}y' + 3F'''_{xy^2}y'^2 + F'''_{y^3}y'^3 + 3(F''_{xy} + F''_{y^2}y')y'' = 0,$$

для точки возврата коэффиціентъ при y'' равенъ 0, а предыдущіе члены въ 0 не обращаются, слѣдовательно $\frac{1}{y''} = 0$, и $R = 0$. Напримѣръ, для циссоиды $x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$ въ точкѣ возврата (0, 0)

$$y' = \frac{(3a - x)}{2a - x}\sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

обращается въ 0, а

$$y'' = \frac{3a^2}{\sqrt{x(2c - x)^5}}$$

обращается въ безконечность (но при этомъ $F'_y \cdot y'' \equiv \frac{6a^2x}{(2a - x)}$ обращается въ 0).

5. *Кругъ есть единственная кривая постоянной кривизны*. Это можно получить непосредственно, разыскивая функцію, удовлетворяющую условію $\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \text{const.}$, т. е. интегрируя это дифференціальное уравненіе, но можно получить и слѣдующимъ образомъ. Если α — уголъ касательной съ осью x, то $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, отсюда

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds}$$

и такимъ образомъ

$$dx = ds \,.\, \cos\alpha \quad \text{и} \quad dy = ds \,.\, \sin\alpha.$$

Но по опредѣленію

$$ds = R \,.\, d\alpha \tag{6}$$

слѣдовательно

$$dx = R \,.\, \cos\alpha\, d\alpha$$

$$dy = R \,.\, \sin\alpha\, d\alpha. \tag{7}$$

Если $R = \text{Const.}$, то отсюда имѣемъ:

$$x = R\sin\alpha + C_1$$

$$y = -R.\cos\alpha + C_2$$

или исключая α:

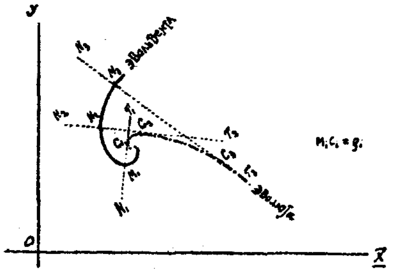
$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = R^2,$$

это есть уравненіе окружности.

§ 27. Эволюта (развертка). Уравненія (5) предыдущаго параграфа

$$\xi - x = -\frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} \qquad \eta - y = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} \tag{1}$$

позволяютъ для каждой точки M данной кривой (K) построить соотвѣтственный центръ кривизны C. Когда точка M описываетъ кривую (K), точка C, вообще говоря [1]), перемѣщается и описываетъ нѣкоторую другую кривую (K'), которая называется *эволютою* или *разверткою* кривой (K). Если въ (1) ввести радіусъ кривизны R и уголъ α касательной съ осью x-овъ, формулы (1) перепишутся



Черт. 36.

$$\xi = x - R.\sin\alpha, \quad \eta = y + R.\cos\alpha \tag{2}$$

Примѣръ 1. Эволюта эллипса

$$\xi = a\cos t - b.\cos t.\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{(a^2 - b^2)\cos^3 t}{a}$$

$$\eta = b\sin t - a\sin t.\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{(a^2 - b^2)\sin^3 t}{b}$$

Исключая отсюда t получаемъ $(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ — кривая имѣющая форму, подобную астроидѣ и лежащая **вся внутри эллипса** при $a \leqq b\sqrt{2}$.

2. Эволюта гиперболы

$$\left\{x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\}$$

въ параметрической формѣ выражается уравненіями

$$\xi = \frac{a^2 + b^2}{a}\left(\frac{t + \frac{1}{t}}{2}\right)^3, \quad \eta = \frac{a^2 + b^2}{b}\left(\frac{t - \frac{1}{t}}{2}\right)^3,$$

откуда по исключеніи t получаемъ уравненіе

$$(a\xi)^{2/3} - (b\eta)^{2/3} = (a^2 + b^2)^{2/3}.$$

---

[1]) Исключеніе составляетъ кругъ, центръ кривизны каждой точки котораго совпадаетъ съ его центромъ.

3. Эволюта параболы $y^2 = 2px$ имѣетъ уравненіе $27p\eta^2 - 8(\xi - p)^3$,— это такъ называемая полукубичная парабола.

4. Эволюта циклоиды есть снова циклоида, только иначе расположенная: ея уравненіе $\xi = a(t + \sin t)$, $\eta = -a(1 - \cos t)$ переходитъ въ обычный видъ при замѣнѣ $t = \pi + t'$, и перемѣнѣ координатъ

$$\xi = \pi a + \xi_1, \quad \eta = -2a + \eta_1.$$

5. Логариѳмическая спираль: $r = ae^{m\theta}$. Предположимъ, что ось x-овъ совпадаетъ съ полярной осью и начало координатъ съ полюсомъ. Тогда уголъ α касательной съ осью x-овъ по предыдущему равенъ $\alpha = \theta + \psi$, гдѣ $\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{r'_\theta}$. Для даннаго случая $\frac{r'_\theta}{r} = m$, стало быть $\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{m}$. Радіусъ кривизны, какъ нашли выше, $R = r\sqrt{1 + m^2} = r : \sin\psi$.

Такимъ образомъ

$$\xi = r.\cos\theta - r\frac{\sin(\theta + \psi)}{\sin\psi} = -r\sin\theta.\operatorname{cotg}\psi = -mr\sin\theta.$$

по (1) этого §'а

$$\eta = r\sin\theta + r\frac{\cos(\theta + \psi)}{\sin\psi} = r\cos\theta.\operatorname{cotg}\psi = mr\cos\theta.$$

Чтобы получить уравненіе эволюты въ полярныхъ координатахъ, положимъ, что ея координаты: $\xi = \varrho\cos\sigma$, $\eta = \varrho\sin\sigma$. Сравнивая съ предыдущими выраженіями, имѣемъ: $\varrho = mr$, $-\sin\theta = \cos\sigma$, $\sin\sigma = \cos\theta$, т. е. $\sigma = \theta + \frac{\pi}{2}$ и слѣдовательно, вводя въ уравненіе спирали ϱ и σ, получимъ уравненіе эволюты ея $\varrho = mae^{m\left(\sigma - \frac{\pi}{2}\right)}$,—это снова логариѳмическая спираль, но повернутая на нѣкоторый уголъ, ибо замѣтимъ, что положивъ $m = e^{\log m}$, приведемъ уравненіе къ виду:

$$\varrho = a.e^{m\left(\sigma - \frac{\pi}{2} + \frac{\log m}{m}\right)}.$$

Свойства эволюты:

1) *Касательною въ точкѣ эволюты служитъ нормаль въ той точкѣ искомой кривой, для которой точка эволюты служитъ центромъ кривизны.* Дѣйствительно, мы уже знаемъ, что точка эволюты лежитъ на соотвѣтствующей нормали, кромѣ того изъ (2) находимъ съ помощью (7) § 26

$$d\xi = dx - dR.\sin\alpha - R.\cos\alpha.d\alpha = -dR.\sin\alpha \tag{3}$$

$$d\eta = dy + dR.\cos\alpha - R\sin\alpha\,d\alpha = dR.\cos\alpha$$

Поэтому

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\operatorname{cotg}\alpha, \quad \text{если} \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha; \; \alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

т. е. нормаль кривой служитъ касательной къ ея эволютѣ.

2) *Длина дуги эволюты равна разности радiусовъ кривизны въ точкахъ исходной кривой, соотвѣтствующихъ началу и концу дуги эволюты.* Дѣйствительно, изъ (3)

$$d\xi^2 + d\eta^2 = dR^2, \text{ т. е. } d\sigma = \pm dR \tag{5}$$

если σ — дуга эволюты, откуда $\sigma = \pm(R - R_0)$.

Если знакъ разности $R - R_0$ признать знакомъ σ, то двойной знакъ можно опустить.

3) *Если радiусъ кривизны эволюты обозначимъ* R_1; *а* R *радiусъ кривизны исходной кривой, то*

$$R_1 = \pm R\frac{dR}{ds}. \tag{6}$$

Дѣйствительно, $ds = Rd\alpha$ для исходной кривой и $d\sigma = R_1\, d\alpha_1$ для эволюты; но по (4) $\alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$, слѣдовательно $d\alpha_1 = d\alpha$ и кромѣ того по (5) $d\sigma = \pm dR$.

Такимъ образомъ $\pm dR = R_1 . d\alpha$ или съ помощью (6) § 26 $\pm RdR = R_1\, ds$.

4) Опредѣливъ эволюту для нѣкоторой кривой можно искать для нея снова геометрическое мѣсто центровъ кривизны; получимъ эволюту эволюты, или *вторую эволюту* данной кривой.

Съ помощью формулъ (1)—(6) находимъ, означая ξ_1, η_1, R_1, α_1 координаты центра, радiусъ кривизны и уголъ касательной съ осью x-овъ для эволюты

$$\xi_1 = \xi - R_1 . \sin\alpha_1 = x - R\sin\alpha - R_1\cos\alpha\,,$$

$$\eta_1 = \eta + R_1 . \cos\alpha_1 = y + R\cos\alpha - R_1\sin\alpha.$$

Радiусъ кривизны второй эволюты

$$R_2 = \pm R_1\frac{dR_1}{d\sigma} = \pm R\frac{dR . dR_1}{\pm ds . dR}$$

т. е.

$$R_2 = \pm R\frac{dR_1}{ds}$$

и слѣдовательно, вообще

$$R_m = \pm R\frac{dR_{m-1}}{ds}\,,$$

что можетъ быть доказано переходомъ отъ n къ $n+1$.

§ 28. Инволюта или эвольвента. Обратная задача: *для данной кривой найти ту кривую, которой она служитъ разверткою*, приводитъ къ *инволютамъ* или *эвольвентамъ*. Если кривая задана уравненіями въ параметрической формѣ и притомъ вспомогательнымъ независимымъ перемѣннымъ является дуга, то уравненія инволюты могутъ быть получены въ конечномъ видѣ. Пусть данная кривая есть

$$\xi = \varphi(\sigma), \quad \eta = \psi(\sigma), \tag{1}$$

и пусть уравненія инволюты суть

$$X = \Phi(\sigma), \quad Y = \Psi(\sigma). \tag{2}$$

Уравненіе касательной къ (1)

$$\frac{X-\xi}{\xi'} = \frac{Y-\eta}{\eta'} \tag{3}$$

должно удовлетвориться при замѣнѣ текущихъ координатъ X, Y координатами точки (2), принадлежащей тому же значенію параметра σ,—ибо нормаль въ точкѣ (2) есть касательная въ соотвѣтствующей точкѣ (1). Называя n общее значеніе двухъ такимъ образомъ получаемыхъ отношеній

$$\frac{x-\xi}{\xi'} = \frac{y-\eta}{\eta'} = n$$

получимъ:

$$x = \xi + n\xi', \quad y = \eta + n\eta'. \tag{4}$$

Чтобы имѣть уравненія (2), нужно выразить n въ функціи σ. Для этого составимъ

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = n^2(\xi'^2 + \eta'^2), \tag{5}$$

но $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$ (такъ какъ производныя берутся по дугѣ (1)). Такимъ образомъ n выражаетъ—вплоть до знака—разстояніе соотвѣтствующихъ точекъ кривыхъ (1) и (2). Касательная къ (1) должна быть нормалью къ (2), отсюда

$$1 + \frac{y'}{x'} \cdot \frac{\eta'}{\xi'} \quad \text{или} \quad y'\eta' + x'\xi' = 0. \tag{6}$$

Но дифференцируя (4) имѣемъ:

$$x' = \xi' + n\xi'' + n'\xi'$$

$$y' = \eta' + n\eta'' + n'\eta'$$

Вставляя эти значенія въ (6), находимъ:

$$\xi'(\xi'+n\xi''+n'\xi')+\eta'(\eta'+n\eta''+n'\eta')=0$$

или

$$(\xi'^2+\eta'^2)(1+n')+n(\xi'\xi''+\eta'\eta'')=0.$$

Но такъ какъ независимое перемѣнное дуга, то $\xi'^2+\eta'^2=1$ и $\xi'\xi''+\eta'\eta''=0$ и такимъ образомъ послѣднее уравненіе принимаетъ видъ: $1+n'=0$. Отсюда

$$n=-\sigma+c. \tag{7}$$

Внося это значеніе въ (4), приходимъ къ уравненіямъ инволюты:

$$x=\xi+(c-\sigma)\xi'; \quad y=\eta+(c-\sigma)\eta'. \tag{8}$$

Здѣсь c — произвольная постоянная. Такимъ образомъ мы получаемъ не одну инволюту, а безчисленное ихъ множество, ибо начальное значеніе радіуса кривизны можетъ быть принято совершенно произвольно. Всѣ инволюты будутъ имѣть нормалями касательныя къ данной кривой.

Примѣръ. *Инволюта круга.* Уравненіе круга въ параметрической формѣ $\xi=r.\cos t$, $\eta=r.\sin t$ можетъ быть приведено къ нужному намъ виду, ибо для круга $\sigma=r\,.\,t$ (r — радіусъ окружности). Слѣдовательно, уравненія инволюты будутъ:

$$x=r\cos\frac{\sigma}{r}+(\sigma-c)\sin\frac{\sigma}{r}; \quad y=r\sin\frac{\sigma}{r}-(\sigma-c)\cos\frac{\sigma}{r}$$

или, если снова ввести $\sigma=rt$:

$$x=r\cos t+(rt-c)\sin t.$$

$$y=r\sin t-(rt-c)\cos t.$$

§ 29. Огибающія семейства кривыхъ. Если уравненіе, опредѣляющее кривую, содержитъ нѣкоторую постоянную величину, которой можемъ придавать различныя частныя значенія,— какъ напримѣръ, въ кругѣ $x^2+y^2-c^2=0$ радіусъ c,— то такое уравненіе опредѣляетъ не одну только кривую, а цѣлую совокупность кривыхъ, которыя соотвѣтствуютъ различнымъ частнымъ значеніямъ этой величины, какъ во взятомъ примѣрѣ значеніямъ радіуса круга. Такая совокупность кривыхъ, опредѣляемыхъ однимъ уравненіемъ

$$F(x,\,y,\,c)=0, \tag{1}$$

(если взять прямолинейныя координаты), называется *семействомъ* кривыхъ: таковъ напримѣръ приведенный примѣръ семейства концентрическихъ круговъ, также семейство концентрическихъ равностороннихъ гиперболъ, семейство параболъ, имѣющихъ одну вершину и одну туже ось симетріи; циссоида, строфоида, цѣпная линія, лемниската содержатъ каждая въ своемъ простѣйшемъ уравненіи тотъ или другой параметръ, которому можно придавать любыя значенія.

Двѣ кривыя одного семейства, соотвѣтствующія двумъ значеніямъ параметра c: c_0 и $c_1 = c_0 + \Delta c$

$$F(x, y, c_0) = 0 \tag{1'}$$

$$F(x, y, c_1) = 0 \tag{1''}$$

пересѣкаются въ извѣстномъ числѣ точекъ. Если c_1 стремится къ c_0, т. е. Δc стремится къ нулю, то при выполненіи функціей F извѣстныхъ условій эти точки занимаютъ предѣльныя положенія; такія точки пересѣченія безконечно-близкихъ кривыхъ семействъ называются *характеристическими точками*, а геометрическое мѣсто характеристическихъ точекъ, соотвѣтствующихъ всѣмъ возможнымъ значеніямъ параметра, называется *огибающею* семейства кривыхъ.

Для полученія уравненія огибающей, предположимъ, что $F(x, y, c_1)$ можетъ быть разложено въ строку Taylor'а по степенямъ Δc по крайней мѣрѣ до членовъ 2-го порядка, т. е. что можемъ писать:

$$F(x, y, c_1) \equiv F(x, y, c_0 + \Delta c) \equiv F(x, y, c_0) + \Delta c . F'_{c_0}(x, y, c_0) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} \Delta c^2 . F''_{c_0^2}(x, y, c_0 + \theta \Delta c_0) = 0 . (0 < \theta < 1) \tag{1'''}$$

Система уравненій (1'), (1'') можетъ быть замѣнена системою (1') и (1'''), а эта послѣдняя системою изъ (1') и уравненія

$$0 = F(x, y, c_1) - F(x, y, c_0) = \Delta c . F'_{c_0}(x, y, c_0) + \tfrac{1}{2} \Delta c^2 F''_{c_0^2}(x, y, c_0 + \theta \Delta c_0) .$$

Раздѣляя послѣднее уравненіе на Δc и переходя къ предѣлу $\Delta c = 0$, получимъ уравненіе

$$F'_{c_0}(x\ y\ c_0) = 0 ,$$

которое вмѣстѣ съ (1') и опредѣлитъ характеристическія точки, соотвѣтствующія значенію c_0 параметра c. Опуская значекъ $_0$ при c и давая c всевозможныя значенія, опредѣлимъ всю совокупность характеристическихъ точекъ (т. е. огибающую) двумя уравненіями

$$F(x, y, c) = 0 \tag{1}$$

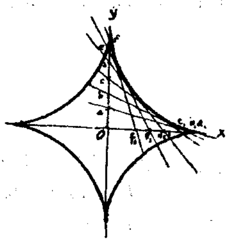
и

$$F'_c(x, y, c) = 0 . \tag{2}$$

Исключая отсюда c, получимъ уравненіе огибающей въ видѣ $\Phi(x, y) = 0$; рѣшая (1) и (2) относительно c, получимъ уравненіе огибающей въ параметрической формѣ

$$x = \varphi(c), \quad y = \psi(c).$$

Примѣръ. Прямая постоянной длины движется, опираясь концами на двѣ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ; найти ея огибающую.



Черт. 37.

Кривая должна состоять изъ четырехъ симметричныхъ частей, соотвѣтственныхъ четыремъ прямымъ угламъ, образуемымъ неподвижными прямыми, которыя примемъ за оси x-овъ и y-овъ. Если α уголъ движущейся прямой съ осью x-овъ, то отрѣзки AB на осяхъ: $OA = -a\cos\alpha$ и $OB = a\sin\alpha$.

Такимъ образомъ уравненіе AB

$$-\frac{x}{a\cos\alpha} + \frac{y}{a\sin\alpha} - 1 = 0\,;$$

дифференцируя его по a получимъ:

$$-\frac{x\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{y\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0,$$

такъ что огибающая опредѣляется уравненіями

$$x\sin^3\alpha + y\cos^3\alpha = 0$$

$$-\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = a\,;$$

отсюда

$$x = \frac{-a.\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha.\dfrac{1}{\sin\alpha} + \cos^3\alpha.\dfrac{1}{\cos\alpha}} = -a\cos^3\alpha$$

$$y = \frac{a.\sin^3\alpha}{\sin^3\alpha.\dfrac{1}{\sin\alpha} + \cos^3\alpha.\dfrac{1}{\cos\alpha}} = +a\sin^3\alpha$$

исключая a получимъ

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

т. е. искомая огибающая есть *астроида*.

Теорема: *Въ каждой характеристической точкѣ соотвѣтственная кривая семейства и огибающая имѣютъ общую касательную.*

Пусть x_1, y_1 характеристическая точка и c_1—соотвѣтствующее значеніе параметра. Тогда имѣемъ

$$F(x_1, y_1, c_1) = 0 \tag{1'}$$

и

$$F(x_1, y_1, c) = 0 \tag{1''}$$

$$F'_c(x_1\ y_1\ c) = 0. \tag{2'}$$

Совмѣстное существованіе этихъ равенствъ показываетъ: что получаемое изъ $F'_c(x_1\ y_1\ c) = 0$ выраженіе c, какъ функціи x и y, при подстановкѣ $x = x_1$, $y = y_1$ должно получать значеніе $c = c_1$.

Угловой коэффиціентъ касательной къ кривой семейства (1), соотвѣтствующей значенію c_1 параметра, опредѣлится изъ уравненія

$$F'_x(x,\ y,\ c_1) + y'\ \ F'_y(x,\ y,\ c_1) = 0 \tag{3}$$

и въ точкѣ (x_1, y_1) имѣемъ:

$$F'_x(x_1,\ y_1,\ c_1) + y_1{}'\ \ F'_y(x_1,\ y_1,\ c_1) = 0 \tag{3'}$$

Для огибающей получимъ угловой коэффиціентъ касательной диффеpенцируя (1) въ предположеніи существованія (2):

$$F'_x + y'\,F'_y + \frac{dc}{dx}.F'_c = 0$$

что съ помощью (2) приводится къ

$$F'_x(x,\ y,\ c) + y'\ F'_y(x,\ y,\ c) = 0,$$

гдѣ c замѣнено по (2). Если сюда подставимъ $x = x_1$, $y = y_1$, то какъ замѣчено выше, получимъ

$$F'_x(x_1\ y_1\ c_1) + y'_2\ \ F'_y(x_1\ y_1\ c_1) = 0$$

т. е. значенія y'_1 и y'_2 равны, ч. и т. д.

Это свойство можетъ служить опредѣленіемъ для огибающихъ. Дѣйствительно, пусть дано семейство кривыхъ (1). Если существуетъ кривая, которая касается всѣхъ кривыхъ (1) и которую мы назовемъ огибающей, то на каждой изъ кривыхъ (1), соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ параметра c, должны находиться точки, принадлежащія огибающей. Каждому значенію параметра соотвѣтствуютъ поэтому опредѣленныя точки на огибающей; и обратно каждая точка огибающей должна лежать на нѣкоторой кривой (1), соотвѣтствующей опредѣленному значенію параметра c. Поэтому координаты точки ξ, η огибающей суть функціи этого параметра:

$$\xi = \Xi(c)\,, \quad \eta = H(c) \tag{4}$$

которыя должны обладать слѣдующими свойствами: 1) какое бы ни взяли значеніе $c = c_1$, должно выполняться условіе:

$$F[\Xi(c_1)\,, \quad H(c_1)\,,\ c_1] = 0\,,$$

ибо точка $\xi_1 = \Xi(c_1)$, $\eta_1 = H(c_1)$ должна лежать на кривой $F(x, y, c_1) = 0$, т. е. *уравненіе*

$$F[\Xi(c)\,, \quad H(c)\,,\ c] = 0 \tag{5}$$

должно выполняться тожественно,— и 2) касательная къ (5) и къ кривой семьи въ ихъ общей точкѣ должна быть общая, т. е. въ каждой точкѣ (4), при каждомъ значеніи c должно быть,

$$\frac{\eta'_c}{\xi'_c} \equiv \frac{H'(c)}{\Xi'(c)} = -\left(\frac{F'_x}{F'_y}\right)_{\substack{x=\Xi\\ y=H}} = -\frac{F'_\xi(\xi,\ \eta,\ c)}{F'_\eta(\xi,\ \eta,\ c)}$$

или

$$F'_\xi \cdot \xi'_c + F'_\eta \cdot \eta'_c = 0\,. \tag{6}$$

Но если (5) выполнено тождественно, то нулю должна равняться полная производная (5) по c, т. е.

$$0 = F'_\xi \cdot \xi'_c + F'_\eta \cdot \eta'_c + F'_c\,,$$

что съ помощью (6) приводится къ

$$0 = F'_c(\xi,\ \eta,\ c)\,. \tag{7}$$

Итакъ, ξ, η, какъ функціи c, должны выполнять (7) и (5), т. е.

$$0 = F(\xi,\ \eta,\ c)\,, \tag{1}$$

исключая изъ которыхъ c и получимъ соотношеніе между ξ, η — уравненіе огибающей.

Не всякое семейство кривыхъ допускаетъ огибающую. Если (1) линейно въ отношеніи параметра

$$F(x,\ y,\ c) \equiv \varphi(x,\ y) + c\,.\,\psi(x,\ y) = 0\,, \tag{8}$$

то $F'_c = \psi(x,\ y)$, и уравненія (1) и (2) приводятся къ:

$$\varphi(x,\ y) = 0\,, \quad \psi(x,\ y) = 0\,,$$

т. е. удовлетворяются только координатами точекъ пересѣченія всѣхъ кривыхъ пучка (8). Такъ всѣ кривыя 2-ой степени

$$x^2 + t \cdot y^2 - 1 - t = 0$$

проходятъ черезъ четыре вершины прямоугольника, образуемаго прямыми

$$x = \pm 1 \quad \text{и} \quad y = \pm 1,$$

которыя и будутъ единственными характеристическими точками.

§ 29. **Второй типъ задачъ на огибающія.** Въ приложеніяхъ теоріи огибающихъ довольно часто встрѣчается нѣкоторое видоизмѣненіе задачи, о которомъ слѣдуетъ упомянуть, — именно семейство кривыхъ можетъ быть задано уравненіемъ

$$F(x,\ y,\ a,\ b) = 0, \tag{9}$$

содержащимъ не одинъ параметръ, а два a и b, связанныхъ соотношеніемъ

$$\varphi(a,\ b) = 0. \tag{10}$$

Тогда по (10) можемъ въ (9) разсматривать b какъ функцію a, и по вышедоказанному добавить къ (9) и (10) уравненіе:

$$F'_a + F'_b \frac{db}{da} = 0. \tag{11}$$

Но изъ (10) находимъ

$$\varphi'_a + \varphi'_b \frac{db}{da} = 0. \tag{12}$$

Исключая изъ (11) и (12) $\dfrac{db}{da}$, получимъ уравненіе

$$F'_a \cdot \varphi'_b - F'_b \cdot \varphi'_a = 0, \tag{13}$$

которое вмѣстѣ съ (9) и (10) опредѣлитъ огибающую, уравненіе которой получимъ, исключая изъ трехъ уравненій два параметра a и b.

Примѣръ 2. Огибающая эллипсовъ, для которыхъ постоянно произведеніе осей. Семейство (9): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ при условіи $ab = \text{Const} = k^2$. Составляемъ уравненія (11) и (12):

$$-\frac{2x^2}{a^3} - \frac{2y^2}{b^3} \cdot b' = 0 \qquad ab' + b = 0$$

исключеніе b' даетъ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \therefore \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2},$$

$x=\pm a:\sqrt{2}$, $y=\pm b:\sqrt{2} \therefore 2xy=\pm k^2$ — равносторонняя гипербола, которой асимптоты суть оси, общія всѣмъ эллипсамъ.

Аналогичнымъ образомъ рѣшается задача и въ общемъ случаѣ, когда семейство кривыхъ зависитъ отъ n параметровъ $a_1 \ldots a_n$, связанныхъ между собою $n-1$ соотношеніями. Пусть

$$F(x, y, a_1, \ldots a_n)=0 \tag{1}$$

уравненіе даннаго семейства, и

$$\varphi_i(a_1, \ldots a_n)=0 \qquad (i=1, 2\ldots n-1) \tag{2}$$

соотношенія между n параметрами $a_1 \ldots a_n$.

Тогда, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, считая одинъ изъ параметровъ, напримѣръ a_1, за независимый, пишемъ:

$$0=\frac{dF}{da_1}=\sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial F}{\partial a_j}\cdot\frac{da_j}{da_1}$$

и производныя $\frac{da_j}{da_1}$ опредѣляемъ изъ $n-1$ уравненій

$$0=\sum_{j=1}^{j=n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a_j}\,\frac{da_j}{da_1}. \qquad (i=1, 2\ldots n-1)$$

Исключеніе производныхъ приводитъ къ опредѣлителю

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial a_1}, & \frac{\partial F}{\partial a_2}, & \ldots & \frac{\partial F}{\partial a_n} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_2}, & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial a_1}, & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial a_2}, & \ldots & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial a_n} \end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

Такимъ образомъ имѣемъ $n+1$ уравненій (1), (2) и (3) изъ которыхъ и нужно исключить $a_1 \ldots a_n$, чтобы получить уравненіе огибающей.

§ 30. Примѣненія теоріи огибающихъ.

Теорема I. *Кривая линія* ($\equiv$геометрическое мѣсто точекъ) *есть огибающая ея касательныхъ.* Въ уравненіи касательной

$$Y-y-\frac{dy}{dx}(X-x)=0 \tag{a}$$

къ кривой $y=f(x)$ можемъ разсматривать абсциссу точки прикосновенія, какъ параметръ. Тогда взявъ отсюда производную по этому параметру получимъ:

$$-\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}(X-x)+\frac{dy}{dx}=0$$

т. е.

$$\frac{d^2y}{dx^2}(X-x)=0. \tag{b}$$

Если данная линія не прямая, то $\frac{d^2y}{dx^2}\neq 0$ и такимъ образомъ (b) дастъ $X=x$, послѣ чего (a) даетъ $Y=y$,—характеристическою точкою является для каждой касательной именно точка прикосновенія, которая такимъ образомъ является точкою пересѣченія двухъ безконечно-близкихъ касательныхъ.

Теорема II. *Эволюта кривой есть огибающая ея нормалей.* Уравненіе нормали

$$X-x+\frac{dy}{dx}(Y-y)=0$$

или, если кривая задана въ параметрической формѣ:

$$x'(X-x)+y'(Y-y)=0$$

Производная по параметру даетъ:

$$x''(X-x)+y''(Y-y)=x'^2+y'^2.$$

Это тѣ же самыя уравненія, которыя въ § 25 служили для опредѣленія центра кривизны. Такимъ образомъ для каждой нормали характеристическою точкою служитъ соотвѣтственный центръ кривизны, и слѣдовательно огибающею нормалей будетъ геометрическое мѣсто ихъ, т. е. эволюта.

Примѣры на огибающія: 3) Найти огибающую прямой, отрѣзки которой на осяхъ координатъ таковы, что построенный на нихъ прямоугольникъ имѣетъ постоянную площадь c^2 (гипербола).

4) Найти огибающую поляръ неподвижной точки C въ отношеніи системы софокусныхъ эллипсовъ и гиперболъ. (Парабола).

5) Огибающая эллипсовъ, сумма осей которыхъ есть величина постоянная $=2k$, есть астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=k^{2/3}$.

6) Прямой уголъ движется такъ, что одна сторона его проходитъ черезъ неподвижную точку, а вершина описываетъ данную неподвижную кривую. Найти огибающую другой стороны.

Если данную точку примемъ за начало координатъ, и уравненіе данной кривой возьмемъ въ параметрической формѣ $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то уравненіе одной стороны угла $y=mx$ и $\psi(t)-m\varphi(t)=0$, а уравненіе другой стороны

$$Y-\psi(t)=-\frac{1}{m}[X-\varphi(t)]$$

или

$$Y\psi(t)+X\varphi(t)=\varphi^2+\psi^2 \tag{a}$$

Огибающую этой стороны и ищемъ, добавляя къ (a)

$$Y\psi'(t)+X\varphi'(t)=2(\varphi\varphi'+\psi\psi') \tag{b}$$

Исключая t изъ (a) и (b), получимъ искомую огибающую.

Но рѣшая непосредственно уравненія (a) и (b) относительно X и Y получимъ

$$X=\frac{\psi'(\varphi^2-\psi^2)-2\varphi\psi\varphi'}{\varphi\psi'-\psi\varphi'}, \quad Y=\frac{2\varphi\psi\psi'+\varphi'(\varphi^2-\psi^2)}{\varphi\psi'-\psi\varphi'}, \text{—}$$

уравненія огибающей въ параметрической формѣ.

Если кривая, которую описываетъ вершина прямого угла, дана въ полярныхъ координатахъ и полюсомъ служитъ данная неподвижная точка, то предыдущія уравненія принимаютъ видъ:

$$X=-\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta$$

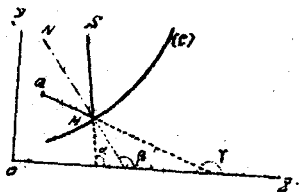
$$Y=-\frac{dr}{d\theta}\cos\theta+r\sin\theta.$$

Частные случаи: a) данная кривая—прямая линія; огибающая—парабола.

b) Данная кривая—циссоида, данная точка—ея точка возврата; огибающая—парабола.

c) Данная кривая—лемниската, данная точка—ея узелъ; огибающая—равносторонняя гипербола.

Задача о каустикахъ. Пусть изъ свѣтящейся точки $Q\,(a, b)$ выходятъ лучи и, падая на кривую (C), отражаются отъ нея, какъ отъ зеркала. Огибающая отраженныхъ лучей называется каустикой (по отраженію) кривой (C). Между угломъ β нормали съ осью X-овъ, угломъ γ—луча падающаго и α—луча отраженнаго въ силу закона отраженія свѣта существуетъ связь, выражаемая равенствомъ



Черт. 38.

$$\angle QMN = \angle NMS$$

или

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta\,,$$

откуда

$$\alpha = 2\beta - \gamma\,;$$

замѣтивъ, что $\operatorname{Cotg}\beta = -y'$ и слѣдовательно,

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2y'}{1-y'^2}, \quad \text{и затѣмъ} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{y-b}{x-a},$$

получимъ

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{2y'}{1-y'^2} - \dfrac{y-b}{x-a}}{1+\dfrac{2y'(y-b)}{(x-a)(1-y'^2)}} = \frac{2y'(x-a)-(y-b)(1-y'^2)}{(x-a)(1-y'^2)+2y'(y-b)}$$

Поэтому уравненіе прямой MS напишется

(a)
$$[(x-a)(1-y'^2)+2y'(y-b)](Y-y)+$$
$$+[(y-b)(1-y'^2)-2y'(x-a)](X-x)=0.$$

Приравнявъ нулю производную лѣвой части по x, получимъ по приведеніи

(b)
$$[2y''\{(y-b)-y'(x-a)\}+1-y'^2](Y-y)-[2y''\{(x-a)+$$
$$+y'(y-b)\}+y'(1-y'^2)](X-x)+(1+y'^2)[y'(x-a)-(y-b)]=0.$$

Рѣшая уравненія (a) и (b) въ отношеніи $Y-y$ и $X-x$, получимъ уравненіе каустики по отраженію въ параметрической формѣ (считая, что y, y' и y'' выражены черезъ x по уравненію кривой $(C)\ y=f(x)$).

Примѣръ. Каустика круга есть улитка Паскаля, если свѣтящаяся точка лежитъ на кругѣ.

Кривыя преслѣдованія (courbes de poursuite, Verfolgungskurve). „Точка $A=(x_1, y_1)$ описываетъ кривую, опредѣленную уравненіемъ

$$f(x_1, y_1)=0, \tag{1}$$

двигаясь равномѣрно. Опредѣлить геометрическое мѣсто точки $B=(x, y)$ которая двигаясь также равномѣрно, постоянно направляется къ точкѣ A. Въ силу формулированнаго условія, касательная къ искомой кривой въ точкѣ B (которою въ каждый данный моментъ опредѣляется направленіе движенія точки B) должна проходить черезъ точку A: такимъ образомъ уравненіе

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

должно удовлетворяться при подстановкѣ $Y=y_1$, $X=x_1$. Имѣемъ мѣняя знаки

$$y-y_1=\frac{dy}{dx}(x-x_1). \tag{2}$$

Условіе равномѣрности движеній даетъ—если n означать отношеніе скоростей точекъ A и B:

$$ds_1=n.ds$$

или

$$n^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=\frac{dx_1{}^2+dy_1{}^2}{dx^2}. \tag{3}$$

Изъ уравненій (1), (2), (3) и производныхъ первыхъ двухъ выразимъ $x_1, y_1, \frac{dx_1}{dx}$ и $\frac{dy_1}{dx}$ съ помощью x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и подставимъ въ (3).

Если, напримѣръ, точка A описываетъ прямую линію, то принимая ее за ось y-овъ имѣемъ:

$$(1)\quad x_1=0,\qquad (2)\quad y-y_1=x\frac{dy}{dx}\quad \text{и}\quad (3)\quad n\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}=\left(\frac{dy_1}{dx}\right)$$

или, такъ какъ по (2) $\frac{dy_1}{dx}=-x\frac{d^2y}{dx^2}$, то

$$-x\frac{d^2y}{dx^2}=n\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Остается самое общее значеніе y, обращающее это уравненіе въ тожество, найти по правиламъ, которыя излагаются въ курсѣ интегрированія дифференціальныхъ уравненій.

Задача о траэкторіяхъ. Если семейство кривыхъ задано уравненіемъ, рѣшеннымъ относительно параметра: $\Phi(x, y) = C$, то черезъ каждую точку проходитъ только одна кривая этого семейства. Тогда можно поставить задачу—найти кривыя, которыя пересѣкаютъ всѣ кривыя даннаго семейства подъ однимъ и тѣмъ же угломъ. Такія линіи называются *изогональными траэкторіями* даннаго семейства, и въ частности, если онѣ встрѣчаютъ кривыя семейства подъ *прямымъ* угломъ,—*ортогональными траэкторіями* семейства. Такъ инволюта есть траэкторія касательныхъ къ данной кривой.

Выведемъ общее уравненіе для изогональныхъ траэкторій. Если α данный уголъ и $\operatorname{tang}\alpha = m$, то выражая, что уголъ между касательными къ кривой семьи и къ искомой кривой въ общей точкѣ равенъ α, имѣемъ:

$$\frac{\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\Phi'_x}{\Phi'_y}}{1 - \dfrac{\Phi'_x}{\Phi'_y} \cdot \dfrac{dy}{dx}} = m,$$

гдѣ $\dfrac{dy}{dx}$ и $-\dfrac{\Phi'_x}{\Phi'_y}$ — угловые коэффиціенты касательныхъ соотвѣтственно къ искомой кривой и къ кривой (1). Это уравненіе перепишемъ:

$$\Phi'_x dx + \Phi'_y dy = m(\Phi'_y dx - \Phi'_x dy). \tag{a}$$

Если же ищемъ ортогональныя траэкторіи, то должны положить равнымъ нулю знаменатель

$$1 - \frac{\Phi'_x}{\Phi'_y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{или} \quad \Phi'_y dx - \Phi'_x dy = 0. \tag{b}$$

Если напримѣръ, данное семейство есть пучокъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало, то $\dfrac{y}{x} = C$ — его уравненіе. Ортогональныя траэкторіи опредѣляются уравненіемъ

$$\frac{dx}{x} + \frac{y}{x^2} dy = 0,$$

или по умноженіи на x^2:

$$xdx + ydy = 0.$$

Лѣвая часть ни что иное какъ $\frac{1}{2} d(x^2 + y^2)$, слѣдовательно, искомыя траэкторіи опредѣлятся уравненіемъ $x^2 + y^2 = \text{Const}$,— это какъ и слѣдовало ожидать, круги съ центромъ въ вершинѣ пучка. Если же $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, то имѣемъ

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = m\left(\frac{xdx + ydy}{x^2}\right)$$

или

$$xdy - ydx = m(xdx + ydy).$$

Чтобы найти кривыя, которыя этому уравненію удовлетворяютъ. прибѣгнемъ къ введенію полярныхъ координатъ: $x = r.\cos\theta$, $y = r.\sin\theta$, тогда $xdx + ydy = rdr$, а $xdy - ydx = r^2 d\theta$ такъ что уравненіе по сокращеніи на r принимаетъ видъ:

$$rd\theta = mdr$$

или

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{m}$$

то есть

$$d.\log r = d.\left(\frac{\theta}{m}\right);$$

отсюда самыя функціи могутъ различаться только на постоянную, которую означимъ $\log C$:

$$\log r = \frac{\theta}{m} + \log C,$$

то есть

$$r = C.e^{\frac{\theta}{m}}$$

Изогональными траэкторіями пучка прямыхъ являются логариѳмическія спирали.

Примѣръ 2. Ортогональными траэкторіями семейства параболъ $y = cx^2$ являются эллипсы $x^2 + 2y^2 = C'$. Къ квадратурѣ приводится и нахожденіе изогональныхъ траэкторій.

Мы предположили, что уравненіе семейства кривыхъ дано въ рѣшенномъ относительно параметра видѣ.

Если же уравненіе семейства задано въ видѣ не рѣшенномъ

$$\Phi(x, y, c) = 0, \tag{c}$$

то составивъ соотвѣтственныя уравненія (a) или (b), исключимъ затѣмъ параметръ c съ помощью (c).

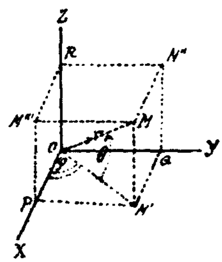
Приложенія дифференціальнаго исчисленія къ геометріи въ пространствѣ.

§ 1. Опредѣленія. Виды уравненія поверхности и кривой въ пространствѣ.

Въ пространствѣ положеніе точки опредѣляется тремя координатами. Въ системѣ прямоугольныхъ координатъ эти величины суть разстоянія точки отъ трехъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей—плоскостей координатъ, обозначаемыхъ обыкновенно x, y, z. Въ системѣ сферическихъ координатъ эти три величины суть разстояніе r точки отъ полюса (радіусъ векторъ), уголъ θ радіуса вектора съ его ортогональной проэкціей на опредѣленную основную плоскость и уголъ φ этой проэкціи съ опредѣленною прямою въ этой плоскости.

Если полюсъ совпадаетъ съ началомъ координатъ прямоугольной системы, основная плоскость—съ плоскостью XOY и основная прямая—съ осью X-овъ, то

$$x = r\cos\theta \,.\, \cos\varphi$$
$$y = r\cos\theta \,.\, \sin\varphi$$
$$z = r\sin\theta.$$



Черт. 39.

Если три координаты связаны между собою однимъ соотношеніемъ, то двѣ изъ нихъ остаются произвольны, и имъ можно придавать всевозможныя значенія. Тогда третья въ силу предположенной зависимости для каждой пары значеній первыхъ двухъ получаетъ уже опредѣленныя значенія. Пусть, напримѣръ,

$$z = f(x,\ y). \tag{1}$$

Взявши какую нибудь пару значеній x и y, т. е. какую нибудь точку въ плоскости XOY, въ силу (1) получаемъ для z опредѣленное значеніе, и, слѣдовательно, на перпендикулярѣ къ плоскости XOY, возставленномъ во взятой точкѣ (x, y), получаемъ опредѣленную точку, находящуюся на разстояніи, равномъ этому значенію z, отъ плоскости XOY. Вся совокупность этихъ точекъ образуетъ поверхность.

Но поверхность можетъ быть задана также не рѣшеннымъ относительно z уравненіемъ вида

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

или, наконецъ, всѣ три координаты могутъ быть выражены, какъ функціи какихъ-нибудь двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, которыя обозначимъ, напримѣръ, черезъ u и v. Такимъ образомъ:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v) \tag{3}$$

будутъ уравненія поверхности въ параметрической формѣ.

Если же x, y, z суть функціи только одного независимаго перемѣннаго, напримѣръ, t:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \\ z &= \chi(t) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

то получаемъ не поверхность, а кривую линію въ пространствѣ. Исключая изъ (4) t, приходимъ, вообще говоря, къ двумъ соотношеніямъ между x, y, z:

$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad \Psi(x, y, z) = 0, \tag{5}$$

каждое изъ которыхъ въ отдѣльности опредѣляетъ поверхность, и такимъ образомъ кривая линія является, какъ пересѣченіе двухъ поверхностей. Не всякая кривая можетъ быть, однако, разсматриваема, какъ полное пересѣченіе двухъ поверхностей. Такъ, если имѣемъ два конуса второго порядка, имѣющихъ одну общую образующую, то линія ихъ пересѣченія распадается на эту общую образующую и на кривую линію. И эта послѣдняя не будетъ, слѣдовательно, полнымъ пересѣченіемъ двухъ поверхностей. Произвольная плоскость пересѣкаетъ каждую изъ коническихъ поверхностей по кривой 2-го порядка, и эти двѣ кривыя имѣютъ четыре общихъ точки, одною изъ которыхъ будетъ точка встрѣчи общей образующей съ сѣкущею плоскостью. Такимъ образомъ на долю кривой линіи пересѣченія поверхностей остается три точки. Мы имѣемъ такимъ образомъ кривую, которая съ произвольно взятою плоскостью пересѣкается въ трехъ точкахъ. Называя вообще *порядкомъ* кривой въ пространствѣ *число точекъ* ея *пересѣченія съ произвольною плоскостью,* можемъ сказать, что кривая пересѣченія взятыхъ конусовъ есть кривая 3-го порядка. Она называется *косымъ коническимъ сѣченіемъ*.

Уравненія (4) могутъ выражать и плоскую кривую. Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ для этого будетъ то, что должны существовать такія четыре постоянныя величины A, B, C, D, чтобы уравненіе

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

удовлетворялось при замѣнѣ x, y, z ихъ выраженіями (4), каково бы ни было значеніе t,—т. е. при извѣстныхъ значеніяхъ A, B, C, D должно существовать тожество

$$A\varphi(t) + B\psi(t) + C\chi(t) + D = 0.$$

Возьмемъ отъ этого тожества три раза производную по t, получимъ

$$\begin{aligned} A\varphi'(t) + B\psi'(t) + C\chi'(t) &= 0 \\ A\varphi''(t) + B\psi''(t) + C\chi''(t) &= 0 \\ A\varphi'''(t) + B\psi'''(t) + C\chi'''(t) &= 0. \end{aligned}$$

Для того, чтобы эти три уравненія были совмѣстны при A, B, C отличныхъ отъ нуля, долженъ обращаться въ нуль опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} \varphi' & \psi' & \chi' \\ \varphi'' & \psi'' & \chi'' \\ \varphi''' & \psi''' & \chi''' \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Это условіе необходимое. Мы покажемъ далѣе, что оно будетъ и достаточнымъ.

Примѣръ. Показать, что кривая заданная уравненіями:

$$x = at^2 + bt + c, \quad y = a't^2 + b't + c', \quad z = a''t^2 + b''t + c''$$

есть кривая плоская.

Замѣтимъ еще, что частнымъ случаемъ уравненій (4) будетъ тотъ, когда за независимое перемѣнное возьмемъ одну изъ координатъ, напримѣръ, x,—тогда (4) приводится къ виду

$$\begin{aligned} y &= \psi(x), \\ z &= \chi(x). \end{aligned} \qquad (7)$$

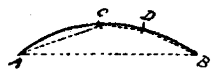
Тѣ же виды уравненій поверхности и кривой получимъ и во всякой другой системѣ координатъ.

Относительно характера функцій, фигурирующихъ въ уравненіяхъ (4), или (7), нужно сдѣлать тѣ же замѣчанія, которыя были сдѣланы относительно плоскихъ кривыхъ.

II. Кривыя въ пространствѣ.

§ 2. Длина дуги и элементъ дуги.

Если имѣемъ нѣкоторую кривую въ пространствѣ (которую предполагаемъ непрерывною) и возьмемъ на ней точки A и B, то, соединивъ A и B прямою, получимъ, что путь отъ A до B по прямой AB будетъ короче всякаго другого, слѣдовательно, и пути, проходимаго по кривой. Если между A и B возьмемъ нѣкоторое число точекъ, напримѣръ двѣ C, D, то длина ломанной $ACDB$ будетъ болѣе прямой AB. Взявъ снова точки на кривой между A и C, между C и D, между D и B и соединяя ихъ прямыми, получимъ новую ломанную, длина которой будетъ болѣе предыдущей ломанной. Продолжая тотъ же процессъ далѣе и измѣряя каждый разъ периметръ получаемыхъ ломанныхъ линій, мы получимъ рядъ возрастающихъ чиселъ. Если этотъ рядъ имѣетъ предѣлъ, то этотъ предѣлъ мы и назовемъ *длиною дуги* кривой AB. Отдѣльную сторону ломанной линіи, когда число сторонъ становится сколь угодно велико, а каждая сторона сколь угодно малою, назовемъ *элементомъ дуги* и обозначимъ ds. Если x, y, z координаты начала этого элемента, то проэкціи его на оси будутъ dx, dy, dz и, слѣдовательно,



Черт. 40.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{8}$$

Косинусы угловъ, которые этотъ элементъ дѣлаетъ съ осями координатъ, выразятся отношеніями

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}. \tag{9}$$

§ 3. Касательная прямая и касательная плоскость.

Проведемъ черезъ точку (x, y, z) прямую, которой направленіе опредѣлялось бы косинусами (9):

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{ds}} \tag{10}$$

или

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}. \tag{11}$$

Эта прямая будетъ содержать не только точку (x, y, z), но и весь примыкающій къ ней элементъ дуги кривой. Она называется *касательной* къ кривой, а (x, y, z) — *точкою прикосновенія*. То же самое уравненіе получимъ мы и тѣмъ путемъ, которымъ получили уравненіе касательной въ точкѣ плоской кривой, — именно, разсматривая эту прямую, какъ предѣльное положеніе сѣкущей, двѣ точки пересѣченія которой съ кривою стремятся къ совпаденію. Для того, чтобы касательная въ точкѣ (x, y, z) существовала, нужно, чтобы функціи φ, ψ, χ имѣли для соотвѣтственнаго значенія параметра t опредѣленную производную.

Если кривая задана уравненіями вида (5), то разсматривая ихъ, какъ результатъ исключенія t изъ уравненій (4), должны получить тожества при подстановкѣ въ нихъ этихъ выраженій x, y, z черезъ t. Поэтому взятые въ этомъ предположеніи дифференціалы отъ лѣвыхъ частей (5) должны быть равны нулю, — т. е.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= d\Phi = \Phi'_x dx + \Phi'_y dy + \Phi'_z dz, \\ 0 &= d\Psi = \Psi'_x dx + \Psi'_y dy + \Psi'_z dz. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Отсюда dx, dy, dz пропорціональны опредѣлителямъ 2-го порядка, составленнымъ изъ коэффиціентовъ этихъ уравненій:

$$\frac{dx}{\Phi'_y \Psi'_z - \Phi'_z \Psi'_y} = \frac{dy}{\Phi'_z \Psi'_x - \Phi'_x \Psi'_z} = \frac{dz}{\Phi'_x \Psi'_y - \Phi'_y \Psi'_x}. \tag{13}$$

Мы придемъ къ этому результату, раздѣляя (12) на одинъ изъ дифференціаловъ, напримѣръ, dx, и рѣшая ихъ относительно $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$.

Сравнивая (13) съ (11), получимъ уравненія касательной къ кривой, заданной уравненіемъ (5):

$$\frac{X-x}{\Phi'_y \Psi'_z - \Phi'_z \Psi'_y} = \frac{Y-y}{\Phi'_z \Psi'_x - \Phi'_x \Psi'_z} = \frac{Z-z}{\Phi'_x \Psi'_y - \Phi'_y \Psi'_x}. \tag{14}$$

Но можно и непосредственно замѣнить въ (12) dx, dy, dz пропорціональными имъ по (11) величинами $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ и такимъ образомъ получимъ уравненія:

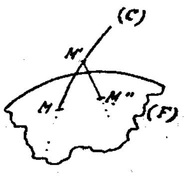
$$\left.\begin{aligned} \Phi'_x(X-x) + \Phi'_y(Y-y) + \Phi'_z(Z-z) = 0, \\ \Psi'_x(X-x) + \Psi'_y(Y-y) + \Psi'_z(Z-z) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Рѣшая эти уравненія относительно $X-x$, $Y-y$, придемъ снова къ уравненіямъ (14). Такимъ образомъ уравненія (15) также опредѣляютъ касательную къ кривой (5), какъ пересѣченіе двухъ плоскостей, проходящихъ черезъ точку прикосновенія (x, y, z).

Представимъ теперь себѣ, что, сохраняя неизмѣнною поверхность $\Phi(x, y, z)=0$, мы будемъ брать различныя поверхности $\Psi(x, y, z)=0$, которыя всѣ проходили бы однако черезъ взятую нами точку (x, y, z) и которыя, слѣдовательно, должны пересѣкать поверхность $\Phi(x, y, z)=0$ по кривымъ, проходящимъ черезъ эту точку. Тогда изъ двухъ уравненій (15), которыя при этомъ будутъ каждый разъ выражать касательную къ кривой пересѣченія, первое уравненіе останется неизмѣннымъ. Оно выражаетъ, слѣдовательно, плоскость, которая содержитъ касательныя ко всевозможнымъ кривымъ, лежащимъ на поверхности $\Phi(x, y, z)=0$ и проходящимъ черезъ взятую точку. Эта плоскость называется *плоскостью касательною къ поверхности* $\Phi=0$ въ ея точкѣ (x, y, z).

§ 4. Прикосновеніе кривой съ поверхностію.

Опредѣленіе. Возьмемъ нѣкоторую поверхность (F) и нѣкоторую кривую (C), которыя имѣютъ общую точку M. Говоримъ, что *кривая* (C) *имѣетъ съ поверхностью* (F) *прикосновеніе* n*-го порядка, если, взявъ на* (C) *точку* M', *безконечно близкую къ* M, *и проведя черезъ* M' *прямую, не параллельную касательной плоскости къ* (F) *въ точкѣ* M, *до встрѣчи ея съ поверхностью въ точкѣ* M'', *получимъ, что* $\overline{M'M''}$ *безконечно-малая порядка* $n+1$ *относительно разстоянія* MM'.



Черт. 41.

Если поверхность (F) опредѣлена уравненіемъ

$$F(x, y, z)=0, \tag{2}$$

а кривая (C)—уравненіями въ параметрической формѣ (4), то данное опредѣленіе приводитъ къ такимъ аналитическимъ критеріямъ.

Пусть M' имѣетъ координаты x_1, y_1, z_1 и соотвѣтствуетъ значенію t_1 параметра t. Пусть $M'M''=d$ и пусть λ, μ, ν суть косинусы угловъ $M'M''$ съ осями координатъ. Тогда координаты точки M'' суть

$$x=x_1+\lambda d,$$
$$y=y_1+\mu d,$$
$$z=z_1+\nu d.$$

Онѣ удовлетворяютъ уравненію (2), слѣдовательно,

$$0=F(x_1+\lambda d, \quad y_1+\mu d, \quad z_1+\nu d).$$

Раскладывая правую часть по строкѣ Taylor'а, имѣемъ:

$$0 = F(x_1, y_1, z_1) + d(\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1} + \nu F'_{z_1}) + d^2\Sigma \tag{16}$$

гдѣ $d^2\Sigma$ означаетъ сумму членовъ, содержащихъ d въ степеняхъ 2-й и высшихъ. Точка M' по предположенію безконечно-близка къ M; поэтому главная часть множителя при d, — то есть главная часть $(\lambda F'_{x_1} + \mu F'_{y_1} + \nu F'_{z_1})$ равна $(\lambda F'_x + \mu F'_y + \nu F'_z)$. Послѣдняя пропорціональна косинусу угла $M'M''$ съ перпендикуляромъ къ плоскости, касательной въ M къ (2) и, слѣдовательно, въ силу сдѣланнаго условія не равна нулю. Поэтому, чтобы уравненіе (16) было выполнено, $F(x_1, y_1, z_1)$ и d должны быть одного измѣренія. Но

$$MM' = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = (t_1 - t)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 + \Sigma}.$$

Поэтому, чтобы d было $(n+1)$-го порядка малости относительно MM', результатъ подстановки въ уравненіе поверхности координатъ точки M', безконечно близкой къ M и лежащей на (C), должно быть $(n+1)$-го порядка относительно разности значеній параметра, соотвѣтствующихъ точкамъ M и M'.

Если, слѣдовательно, разложимъ

$$F(x_1, y_1, z_1) \equiv F[\varphi\{t + (t_1 - t)\}, \ \psi\{t + (t_1 - t)\}, \ \chi\{t + (t_1 - t)\}]$$

по степенямъ $(t_1 - t)$, то въ разложеніи должны выпасть всѣ члены, содержащіе $(t_1 - t)$ въ степени ниже $(n+1)$-ой.

Такимъ образомъ, если $F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \equiv \Omega(t)$, то для прикосновенія n-го порядка должны быть выполнены $(n+1)$ условій:

$$\Omega(t) = 0, \quad \Omega'(t) = 0, \ldots . \ \Omega^{(n)}(t) = 0.$$

§ 5. Соприкасающаяся плоскость.

Уравненіе плоскости

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

содержитъ три произвольныхъ постоянныхъ — отношенія 3-хъ коэффиціентовъ къ 4-му. Поэтому, чтобы плоскость имѣла съ кривою прикосновеніе возможно высшаго порядка, можно на нее наложить *три* условія, т. е. плоскость можетъ имѣть съ кривою прикосновеніе 2-го порядка. Для этого должны быть выполнены условія:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{a}$$

$$Ax' + By' + Cz' = 0, \tag{b}$$

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0. \tag{c}$$

гдѣ предполагаемъ, что x, y, z суть функціи t по (4).

Исключивъ D изъ уравненія плоскости съ помощію (a), получимъ

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0, \tag{d}$$

а условія (b) и (c) доставятъ:

$$\frac{A}{y'z'' - z'y''} = \frac{B}{z'x'' - x'z''} = \frac{C}{x'y'' - y'x''}.$$

Подставляя въ (d) вмѣсто A, B, C эти пропорціональныя имъ величины, получимъ уравненіе плоскости, имѣющей съ кривою соприкосновеніе второго порядка:

$$(X - x)(y'z'' - z'y'') + (Y - y)(z'x'' - x'z'') + (Z - z)(x'y'' - y'x'') = 0$$

или въ видѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Эта плоскость называется *соприкасающеюся* плоскостью кривой (C) въ точкѣ (M).

Для касательной разности $(X - x)$, $(Y - y)$, $(Z - z)$ по (11) пропорціональны x', y', z'; поэтому координаты каждой точки касательной къ (C) въ M удовлетворяютъ (17): *соприкасающаяся плоскость проходитъ черезъ касательную*

Соприкасающаяся плоскость содержитъ и безконечно близкую касательную—въ точкѣ, соотвѣтствующей $(t + dt)$.

Дѣйствительно, эта касательная, если ограничиться первою степенью dt, имѣетъ уравненіе

$$\frac{X - x - x'dt}{x' + x''dt} = \frac{Y - y - y'dt}{y' + y''dt} = \frac{Z - z - z'dt}{z' + z''dt}.$$

Называя σ общее значеніе трехъ отношеній, имѣемъ

$$X-x=x'(\sigma+dt)+x''.\sigma.dt,$$
$$Y-y=y'(\sigma+dt)+y''.\sigma.dt,$$
$$Z-z=z'(\sigma+dt)+z''.\sigma.dt.$$

Эти значенія, очевидно, удовлетворяютъ (17), каково бы ни было σ.

§ 6. Нормальная плоскость, главная нормаль и бинормаль.

Плоская кривая имѣетъ въ каждой точкѣ одну нормаль. Кривая въ пространствѣ имѣетъ ихъ безчисленное множество. Всѣ онѣ лежатъ въ плоскости, проходящей черезъ точку и перпендикулярной къ касательной. Эта плоскость называется *нормальной плоскостью.*

Ея уравненіе:

$$x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0. \tag{18}$$

Она пересѣкается съ соприкасающеюся плоскостью по прямой, проходящей черезъ точку (x, y, z) и называемой *главной нормалью.*

Уравненія главной нормали—(17) и (18)—или, если рѣшить въ отношеніи $(X-x)$ и $(Y-y)$:

$$\frac{X-x}{Bz'-Cy'}=\frac{Y-y}{Cx'-Az'}=\frac{Z-z}{Ay'-Bx'}, \tag{19}$$

гдѣ A, B, C означаютъ коэффиціенты въ уравненіи соприкасающейся плоскости.

Другая замѣчательная нормаль — перпендикуляръ къ соприкасающейся плоскости въ точкѣ прикосновенія. Она называется *бинормалью.*

Ея уравненіе:

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C} \tag{20}$$

Наконецъ, плоскость, проходящая черезъ касательную и бинормаль и слѣдовательно, перпендикулярная къ главной нормали, называется *выпрямляющею плоскостью.* Ея уравненіе:

$$(Bz'-Cy')(X-x)+(Cx'-Az')(Y-y)+(Ay'-Bx')(Z-z)=0,$$

или въ видѣ опредѣлителя:

$$0=\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ A & B & C \end{vmatrix}.$$

Три эти взаимно перпендикулярныя плоскости и три взаимно перпендикулярныя прямыя ихъ пересѣченія составляютъ элементы связаннаго съ точкою кривой треграннаго угла (тріэдра), который называютъ иногда основнымъ тріэдромъ. Поставимъ слѣдующія условія относительно выбора положительнаго направленія касательной, главной нормали и бинормали: основной тріэдръ долженъ быть *конгруэнтенъ* съ системой прямоугольныхъ осей координатъ (т. е. при совмѣщеніи положительнаго направленія касательной съ положительнымъ направленіемъ оси X-овъ и положительнаго направленія главной нормали съ положительнымъ направленіемъ оси Y-овъ положительное направленіе бинормали должно совпасть съ положительнымъ направленіемъ оси Z-овъ. При этомъ выборъ положительнаго направленія касательной и главной нормали произволенъ, но этимъ уже направленіе бинормали опредѣляется вполнѣ.

Назовемъ косинусы угловъ съ осями координатъ, соотвѣтственно OX, OY, OZ:

касательной . . . . . . α, β, γ
главной нормали . . . . l, m, n
бинормали . . . . λ, μ, ν

Между этими девятью косинусами существуетъ рядъ соотношеній,— тѣхъ самыхъ, которыя въ аналитической геометріи выводятся для девяти косинусовъ угловъ, которые дѣлаютъ новыя прямоугольныя оси координатъ съ прежними также прямоугольными.

1) Сумма квадратовъ косинусовъ угловъ прямой съ тремя взаимно перпендикулярными прямыми равна 1; это даетъ во первыхъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=1\\ l^2+m^2+n^2&=1\\ \lambda^2+\mu^2+\nu^2&=1 \end{aligned}\right\}, \tag{I}$$

во вторыхъ, то же соотношеніе должно существовать и для оси OX (а также OY и OZ) относительно основного тріэдра:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2+l^2+\lambda^2&=1\\ \beta^2+m^2+\mu^2&=1\\ \gamma^2+n^2+\nu^2&=1 \end{aligned}\right\}. \tag{I'}$$

2) Условія перпендикулярности:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{касательной и главной нормали: .} & \alpha l+\beta m+\gamma n=0 & 1)\\ \text{касательной и бинормали: . . .} & \alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=0 & 2)\\ \text{главной нормали и бинормали: .} & l\lambda+m\mu+n\nu=0 & 3) \end{array}\right\} \quad \text{(II)}$$

осей

$$\left.\begin{array}{lll} OX \text{ и } OY: & \alpha\beta + lm + \lambda\mu = 0 & 1) \\ OY \text{ и } OZ: & \beta\gamma + mn + \mu\nu = 0 & 2) \\ OZ \text{ и } OX: & \gamma\alpha + nl + \nu\lambda = 0 & 3) \end{array}\right\} \qquad (II')$$

3) Условіе совмѣстимости (конгруэнтности):

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = +1. \qquad (III)$$

4) Изъ уравненій (II) съ помощью (III) и (I) мы можемъ выразить три косинуса одной изъ прямыхъ при помощи шести остальныхъ.

Такъ, первыя два уравненія изъ (II), рѣшенныя относительно α и β, даютъ:

$$\frac{\alpha}{m\nu - n\mu} = \frac{\beta}{n\lambda - l\nu} = \frac{\gamma}{l\mu - m\lambda}.$$

Къ этимъ тремъ отношеніямъ можно добавить равное имъ 4-ое:

$$\frac{\alpha\,.\,\alpha + \beta\,.\,\beta + \gamma\,.\,\gamma}{\alpha(m\nu - n\mu) + \beta(n\lambda - l\nu) + \gamma(l\mu - m\lambda)} = \frac{1}{1} = 1$$

въ силу (I) и (III),

Такимъ образомъ:

$$\alpha = m\nu - n\mu; \quad \beta = n\lambda - l\nu; \quad \gamma = l\mu - m\lambda. \qquad (IV_1)$$

Подобнымъ образомъ рѣшая 3-е и 4-ое изъ (II) относительно l и m, получимъ:

$$\frac{l}{\mu\gamma - \nu\beta} = \frac{m}{\nu\alpha - \lambda\gamma} = \frac{n}{\lambda\beta - \mu\alpha},$$

и общее значеніе отношенія получимъ, написавъ четвертое имъ равное:

$$= \frac{l\,.\,l + m\,.\,m + n\,.\,n}{l(\mu\gamma - \nu\beta) + m(\nu\alpha - \lambda\gamma) + n(\lambda\beta - \mu\alpha)} = +1.$$

Но это послѣднее равно 1, ибо и числитель по (I) и знаменатель по (III) равны 1, такъ что

$$l = \mu\gamma - \nu\beta; \quad m = \nu\alpha - \lambda\gamma; \quad n = \lambda\beta - \mu\alpha. \qquad (IV_2)$$

Наконецъ, рѣшая 2-ое и 3-ье относительно λ и μ, найдемъ:

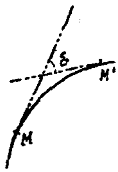
$$\frac{\lambda}{\beta n - \gamma m} = \frac{\mu}{\gamma l - \alpha n} = \frac{\nu}{\alpha m - \beta n} = \frac{\lambda\,.\,\lambda + \mu\,.\,\mu + \nu\,.\,\nu}{\lambda(\beta n - \gamma m) + \mu(\gamma l - \alpha n) + \nu(\alpha m - \beta n)} = 1$$

и слѣдовательно,

$$\lambda = \beta n - \gamma m; \quad \mu = \gamma l - \alpha n; \quad \nu = \alpha m - \beta n. \tag{IV$_3$}$$

§ 7. Кривизна и крученіе. Сферическая индикатриса.

Подобно тому, какъ это было сдѣлано по отношенію къ плоскимъ кривымъ, мѣрою уклоненія кривой въ пространствѣ отъ прямой или мѣрою кривизны можно принять отношеніе угла между двумя безконечно близкими касательными къ дугѣ между точками прикосновенія. Называя указанный уголъ ($\equiv$уголъ смежности) ε, получимъ



Черт. 42.

$$K = \frac{\varepsilon}{ds} \tag{1}$$

мѣра кривизны.

Но кромѣ этого угла смежности, который является угломъ между двумя послѣдовательными элементами кривой и который встрѣтился уже въ теоріи кривыхъ плоскихъ, кривыя въ пространствѣ приводятъ къ новому понятію.

У плоской кривой и третій элементъ и всѣ прочіе лежатъ въ одной и той же плоскости. Кривая въ пространствѣ въ плоскости не укладывается, и перейдя отъ точки M къ точкѣ M', получимъ въ M' новую соприкасающуюся плоскость. Уголъ между двумя безконечно-близкими соприкасающимися плоскостями характеризируетъ уклоненіе кривой отъ плоскости. Онъ называется *угломъ крученія*, и *мѣрою крученія* (или *мѣрою второй кривизны*) называютъ отношеніе угла крученія къ элементу дуги MM'. Итакъ

$$K' = \frac{\tau}{ds}, \tag{2}$$

если τ — уголъ крученія. Отсюда и происходитъ придаваемое кривымъ въ пространствѣ наименованіе *кривыхъ двоякой кривизны* (Clairault), и величинѣ (1) — *мѣры первой кривизны*.

Для полученія аналитическаго выраженія первой и второй кривизны удобно прибѣгнуть къ введенію понятія о такъ называемой *сферической индикатрисѣ*.

Представимъ себѣ систему прямыхъ, уравненія которыхъ

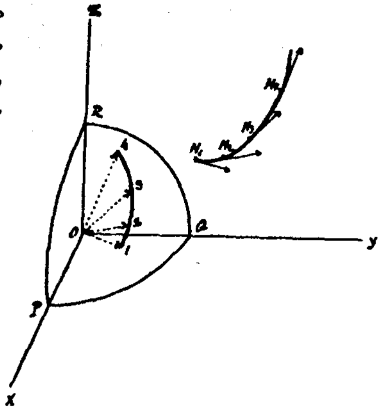
$$x = mz + p; \quad y = nz + q;$$

или

$$\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v} = \frac{z-c}{w}$$

зависятъ отъ *одного* параметра. Чтобы характеризовать измѣненіе *направленія* этихъ прямыхъ съ измѣненіемъ параметра, проводимъ черезъ нѣкоторую точку прямыя, параллельныя прямымъ системы,—онѣ образуютъ нѣкоторую коническую поверхность; изъ той же точки, какъ центра, описываемъ сферу радіусомъ, равнымъ 1, которая построенную коническую поверхность пересѣчетъ по кривой. Эта кривая и называется *сферической индикатрисой* для разсматриваемой системы прямыхъ.

Совокупность касательныхъ къ кривой двоякой кривизны представляетъ систему прямыхъ такого типа: уравненіе касательной зависитъ отъ того же независимаго перемѣннаго (t, s или x), которое фигурируетъ въ уравненіяхъ кривой. Если черезъ какую-нибудь точку, напримѣръ, черезъ начало координатъ, проведемъ прямыя, параллельныя касательнымъ, то на сферѣ, описанной изъ начала координатъ радіусомъ, равнымъ 1, получится кривая, какъ пересѣченіе построенной конической поверхности со сферою, и какая-нибудь точка этой кривой имѣетъ своими координатами какъ разъ косинусы угловъ касательной съ осями координатъ (ибо $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$). Уголъ безконечно близкихъ касательныхъ равенъ углу параллельныхъ имъ образующихъ, и измѣряется дугою кривой на сферѣ между точками встрѣчи этихъ образующихъ со сферою. Если σ—дуга построенной сферической индикатрисы касательныхъ, то



Черт. 43.

$$d\sigma^2=d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2 \quad \text{и} \quad d\sigma=\varepsilon.$$

Такимъ образомъ

$$K=\frac{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2}}{ds};$$

величина, обратная K, называется *радіусомъ кривизны* (первой):

$$r=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2}}. \tag{3}$$

Но мы видѣли, что $\alpha=\frac{dx}{ds}$ и т. д. (§ 2).

Слѣдовательно,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}$$

и т. д. Откуда

$$r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}. \tag{4}$$

Это и будетъ выраженіе радіуса кривизны, если независимое перемѣнное въ уравненіяхъ кривой есть дуга $(s = t)$. Если же независимое перемѣнное какое нибудь другое t, то

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{x'}{s'}$$

и слѣдовательно,

$$d\alpha = d\left(\frac{x'}{s'}\right) = \frac{s'x'' - s''x'}{s'^2} \cdot dt,$$

а

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{s'x'' - s''x'}{s'^2} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{s'x'' - x's''}{s'^3}.$$

Такимъ образомъ

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2 = \frac{(s'x'' - x's'')^2 + (s'y'' - y's'')^2 + (s'z'' - z's'')^2}{s'^6} =$$

$$= \frac{1}{s'^6}\{s'^2(x''^2 + y''^2 + z''^2) - 2s's''(x'x'' + y'y'' + z'z'') + s''^2(x'^2 + y'^2 + z'^2)\}.$$

Но

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad \text{и} \quad s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z'',$$

поэтому предыдущее выраженіе равно

$$\frac{1}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}\{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2\},$$

или по извѣстной формулѣ Эйлера:

$$= \frac{1}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}\{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2\}.$$

Замѣняя этимъ выраженіемъ подкоренное количество въ (3), получимъ:

$$r = \pm \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}} \tag{5}$$

Если независимое перемѣнное есть x, то $x' = 1$, $x'' = 0$. Выраженіе упрощается, но принимаетъ несимметричный видъ.

Чтобы получить аналитическое выраженіе для *мѣры крученія* (величина обратная которой называется также *радіусомъ крученія*, хотя съ нею не связывается такое геометрическое значеніе, какъ съ радіусомъ первой кривизны) строимъ сферическую индикатрису бинормалей и, называя элементъ ея дуги $d\sigma'$, имѣемъ:

$$\tau = d\sigma' \quad \text{и} \quad d\sigma' = \sqrt{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2}$$

Такимъ образомъ:

$$K' = \sqrt{\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2} \tag{6}$$

Не останавливаясь на дальнѣйшихъ преобразованіяхъ, перейдемъ къ выводу выраженій производныхъ девяти косинусовъ,—такъ называемыхъ формулъ Frenet-Serret,—которыя были даны въ 1847 году Frenet и въ 1851 г. J. A. Serret.

§ 8. Формулы Frenet-Serret.

Примемъ за вспомогательное независимое перемѣнное дугу s, такъ что кривая опредѣлится уравненіями:

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s).$$

Означая снова производныя по этому независимому перемѣнному значками (') (такъ что $x' = \frac{dx}{ds}$ и т. д.), имѣемъ:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \tag{1}$$

и

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0. \tag{2}$$

Выразимъ 9 косинусовъ α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν черезъ производныя координатъ по дугѣ:

1) *Касательная*: мы уже имѣли

$$\alpha = x', \quad \beta = y', \quad \gamma = z' \tag{3}$$

2) *Бинормаль*: косинусы ея угловъ пропорціональны коэффиціентамъ уравненія соприкасающейся плоскости; если множитель пропорціональности означить r, то

$$\lambda = r(y'z'' - z'y''); \quad \mu = r(z'x'' - x'z''); \quad \nu = r(x'y'' - y'x'') \qquad (4)$$

3) *Главная нормаль*: ея косинусы l, m, n можно бы опредѣлить по предыдущимъ формуламъ (§ 6, IV_2), но можно и проще: по предыдущему (§ 6, II. 1 и 3):

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0, \quad \lambda l + \mu m + \nu n = 0.$$

Уравненіе (2) при помощи (3) перепишется:

$$\alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'' = 0,$$

а такъ какъ λ, μ, ν пропорціональны коэффиціентамъ уравненія соприкасающейся плоскости, то въ силу § 5 (c):

$$\lambda x'' + \mu y'' + \nu z'' = 0.$$

Сопоставляя эти два равенства съ выписанными выше равенствами (§ 6, II. 1 и 3), заключаемъ:

$$\frac{l}{x''} = \frac{m}{y''} = \frac{n}{z''},$$

или, если назвать h общій знаменатель трехъ отношеній:

$$l = hx'', \quad m = hy'', \quad n = hz''.$$

Подставляя эти значенія x'', y'', z'' въ (4), а также замѣняя x', y', z' по (3) и сравнивая съ § 6 (IV_3), получимъ $h = r$, т. е.

$$l = rx'', \quad m = ry'', \quad n = rz''. \qquad (6)$$

Возвышая въ квадратъ и складывая, находимъ:

$$r^2(x''^2 + y''^2 + z''^2) = 1,$$

т. е. снова приходимъ къ заключенію, что множитель r, нами введенный, и есть радіусъ (первой) кривизны.

Выводимъ формулы для производныхъ девяти косинусовъ по дугѣ.

1) *Касательная*. Изъ (3), дифференцируя, имѣемъ:

$$\alpha' = x'', \quad \beta' = y'', \quad \gamma' = z'',$$

или съ помощью (5):

$$\alpha' = \frac{l}{r}, \quad \beta' = \frac{m}{r}, \quad \gamma' = \frac{n}{r} \tag{6}$$

2) *Бинормаль*. Дифференцируемъ второе уравненіе изъ (I) и (II,2) § 6,—выбирая тѣ уравненія, дифференцированіе которыхъ не введетъ другихъ, не опредѣленныхъ еще величинъ, кромѣ λ', μ', ν'. Получимъ:

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$$

и

$$\alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' + (\alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\nu) = 0$$

Но съ помощью (b):

$$\alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\nu = \frac{1}{r}(l\lambda + m\mu + n\nu) = 0.$$

и слѣдовательно, λ', μ', ν' связаны двумя уравненіями

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0 \quad \text{и} \quad \alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' = 0,$$

сравнивая которыя съ (II, 3 и 1) § 6, видимъ, что λ', μ', ν' также пропорціональны l, m, n, но, конечно, множитель пропорціональности другой,—пусть $\frac{1}{\varrho}$, такъ что

$$\lambda' = \frac{l}{\varrho}, \quad \mu' = \frac{m}{\varrho}; \quad \nu' = \frac{n}{\varrho} \tag{7}$$

3) *Главная нормаль*. Для опредѣленія l', m', n' продифференцируемъ по s уравненія (IV_2) § 6; найдемъ

$$\begin{aligned} l' &= (\mu'\gamma - \nu'\beta) + (\mu\gamma' - \nu\beta'), \\ m' &= (\nu'\alpha - \lambda'\gamma) + (\nu\alpha' - \lambda\gamma'), \\ n' &= (\lambda'\beta - \mu'\alpha) + (\lambda\beta' - \mu\alpha'), \end{aligned}$$

что съ помощью (6) и (7) принимаетъ видъ:

$$\begin{aligned} l' &= \frac{1}{\varrho}(m\gamma - n\beta) + \frac{1}{r}(\mu n - \nu m), \\ m' &= \frac{1}{\varrho}(n\alpha - l\gamma) + \frac{1}{r}(\nu l - \lambda n), \\ n' &= \frac{1}{\varrho}(l\beta - m\alpha) + \frac{1}{r}(\lambda m - \mu l), \end{aligned}$$

или, наконецъ, съ помощью (IV_1) и (IV_3) § 6:

$$l' = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{\varrho}; \quad m' = -\frac{\beta}{r} - \frac{\mu}{\varrho}; \quad n' = -\frac{\gamma}{r} - \frac{\nu}{\varrho} \tag{8}$$

Выразимъ теперь $\frac{1}{\rho}$ черезъ производныя координатъ по дугѣ. Для этого найдемъ производныя λ', μ', ν' по (4) и подставимъ въ (7). Имѣемъ:

$$
\begin{aligned}
\frac{l}{\varrho} &= r' \cdot \frac{\lambda}{r} + r(y'z''' - z'y'''),\\
\frac{m}{\varrho} &= r' \cdot \frac{\mu}{r} + r(z'x''' - x'z'''),\\
\frac{k}{\varrho} &= r' \cdot \frac{\nu}{r} + r(x'y''' - y'x''').
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Умножаемъ эти равенства на l, m, n и складываемъ, причемъ во вторыхъ слагаемыхъ правыхъ частей замѣняемъ сразу l, m, n черезъ rx'', ry'', rz'' по (5); найдемъ:

$$
\frac{l^2 + m^2 + n^2}{\varrho} = \frac{r'}{r}(\lambda l + \mu m + \nu n) + r\,[x''(y'z''' - z'y''') + y''(z'x''' - x'z''') + z''(x'y''' - y'x''')],
$$

что съ помощью (I. 2) и (III. 3) § 6 даетъ

$$
\frac{1}{\varrho} = -r^2 \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}
\tag{10}
$$

или

$$
\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}
\tag{10'}
$$

Съ другой стороны, возвышая (7) въ квадратъ и складывая, найдемъ:

$$
\frac{1}{\varrho^2} = \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2,
$$

т. е. $\frac{1}{\varrho}$ и есть мѣра крученія, введенная въ предыдущемъ параграфѣ. Намъ остается составить выраженіе для радіуса крученія, когда вспомогательное независимое перемѣнное t не есть дуга. Для радіуса r первой кривизны соотвѣтствующее выраженіе уже есть. Нужно составить только опредѣлитель. Для этого замѣтивъ, что $x'_s = \frac{x'_t}{s'_t}$, — будемъ писать просто: $x'_s = \frac{x'}{s'}$ означая знакомъ $'$ производную по t; и далѣе $x''_s = \frac{1}{s'} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{s'}\right)$;

$$
x'''_s = \frac{1}{s'} \cdot \frac{d}{dt}(x''_s) = \frac{1}{s'} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{s'}\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{s'}\right)\right) = -\frac{s''}{s'^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{s'}\right) + \frac{1}{s'^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x'}{s'}\right),
$$

то же и для производныхъ y и z. Такимъ образомъ, обмѣнивъ въ опредѣлителѣ мѣста строкъ и столбцовъ получимъ:

$$\begin{vmatrix} x'_s & x''_s & x'''_s \\ y'_s & y''_s & y'''_s \\ z'_s & z''_s & z'''_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x'}{s'} & \frac{1}{s'}\left(\frac{x'}{s'}\right)' & -\frac{s''}{s'^3}\left(\frac{x'}{s'}\right)' + \frac{1}{s'^2}\left(\frac{x'}{s'}\right)'' \\ \frac{y'}{s'} & \frac{1}{s'}\left(\frac{y'}{s'}\right)' & -\frac{s''}{s'^3}\left(\frac{y'}{s'}\right)' + \frac{1}{s'^2}\left(\frac{y'}{s'}\right)'' \\ \frac{z'}{s'} & \frac{1}{s'}\left(\frac{z'}{s'}\right)' & -\frac{s''}{s'^3}\left(\frac{z'}{s'}\right)' + \frac{1}{s'^2}\left(\frac{z'}{s'}\right)'' \end{vmatrix} = \frac{1}{s'^4}\begin{vmatrix} x' & \left(\frac{x'}{s'}\right)' & \left(\frac{x'}{s'}\right)'' \\ y' & \left(\frac{y'}{s'}\right)' & \left(\frac{y'}{s'}\right)'' \\ z' & \left(\frac{z'}{s'}\right)' & \left(\frac{z'}{s'}\right)'' \end{vmatrix},$$

если къ третьему столбцу придать второй, умноженный на $\frac{s''}{s'^2}$, и вынести общіе множители $\frac{1}{s'}$, $\frac{1}{s'}$, $\frac{1}{s'^2}$ изъ-подъ знака опредѣлителя. Замѣнимъ теперь

$$\left(\frac{x'}{s'}\right)' = \frac{x''}{s'} - \frac{x's''}{s'^2}, \quad \left(\frac{x'}{s'}\right)'' = \frac{x'''}{s'} - 2\frac{x''s''}{s'^2} - x'\left(\frac{s''}{s'^2}\right)'$$

и ко второму столбцу придадимъ первый, умноженный на $\frac{s''}{s'^2}$; къ третьему придадимъ первый, умноженный на $\left(\frac{s''}{s'^2}\right)'$, останется

$$= \frac{1}{s'^4}\begin{vmatrix} x' & \frac{x''}{s'} & \left(\frac{x'''}{s'} - 2x''\frac{s''}{s'^2}\right) \\ y' & \frac{y''}{s'} & \left(\frac{y'''}{s'} - 2y''\frac{s''}{s'^2}\right) \\ z' & \frac{z''}{s'} & \left(\frac{z'''}{s'} - 2z''\frac{s''}{s'^2}\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{s'^6}\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix},$$

если къ третьему придать второй, умноженный на $2\frac{s''}{s'}$ и вынести общіе множители $\frac{1}{s'}$ и $\frac{1}{s'}$ членовъ 2-го и 3-го столбца изъ-подъ знака опредѣлителя.

Такимъ образомъ:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{\sum(x'y''-y'x'')^2}\cdot\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}$$

общее выраженіе мѣры крученія.

Дополнимъ предыдущія формулы еще обратными,— выраженіями производныхъ x, y, z по s черезъ девять косинусовъ:

$$x' = \alpha, \quad y' = \beta, \quad z' = \gamma \quad \text{по (3)} \tag{11}$$

$$x'' = \frac{l}{r}, \quad y'' = \frac{m}{r}, \quad z'' = \frac{n}{r} \quad \text{по (5)} \tag{12}$$

отсюда, дифференцируя по s, находимъ:

$$x''' = \frac{l'}{r} - \frac{lr'}{r^2} = \frac{1}{r}\left(-\frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{\varrho}\right) - l\frac{r'}{r^2} = -\frac{\alpha}{r^2} - \frac{lr'}{r^2} - \frac{\lambda}{r\varrho}. \tag{13}$$

Точно также:

$$y''' = -\frac{\beta}{r^2} - \frac{mr'}{r^2} - \frac{\mu}{r\varrho},$$

$$z''' = -\frac{\gamma}{r^2} - \frac{nr'}{r^2} - \frac{\nu}{r\varrho}.$$

§ 9. Соприкасающійся шаръ.

Уравненіе шара содержитъ *четыре* произвольныхъ коэффиціента (три координаты центра и радіусъ), которыми можно располагать, чтобы достичь наиболѣе тѣснаго соприкосновенія шара съ кривою; слѣдовательно, соприкосновеніе можетъ быть *третьяго* порядка. Если

$$(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + (Z-\zeta)^2 - R^2 = 0$$

это уравненіе шара, то условія соприкосновенія третьяго порядка суть:

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\xi)^2 - R^2 = 0, \tag{1}$$

$$(x-\xi)x' + (y-\eta)y' + (z-\zeta)z' = 0, \tag{2}$$

$$(x-\xi)x'' + (y-\eta)y'' + (z-\zeta)z'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0, \tag{3}$$

$$(x-\xi)x''' + (y-\eta)y''' + (z-\zeta)z''' + 3(x'x'' + y'y'' + z'z'') = 0. \tag{4}$$

изъ которыхъ нужно опредѣлить ξ, η, ζ и R.

Уравненіе (2), выражаетъ нормальную плоскость, такъ что: *центръ соприкасающагося шара лежитъ въ нормальной плоскости.*

Допустимъ теперь, что кривая выражена уравненіями, гдѣ за независимое перемѣнное принята дуга.

Уравненіе (2) перепишется:

$$\alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) + \gamma(\zeta - z) = 0. \tag{5}$$

Уравненіе (3) принимаетъ съ помощью (1) и (12) § 8 видъ:

$$l(\xi-x)+m(\eta-y)+n(\zeta-z)-r=0 \tag{6}$$

и (4) съ помощью (13) и (2) § 8:

$$\begin{aligned}0=\frac{1}{r^2}\{\alpha(\xi-x)+\beta(\eta-y)+\gamma(\zeta-z)\}+\\+\frac{r'}{r^2}\{l(\xi-x)+m(\eta-y)+n(\zeta-z)\}+\\+\frac{1}{r\varrho}\{\lambda(\xi-x)+\mu(\eta-y)+\nu(\zeta-z)\}.\end{aligned} \tag{4'}$$

Съ помощью (5) и (6) это уравненіе замѣняется такимъ:

$$\lambda(\xi-x)+\mu(\eta-y)+\nu(\zeta-z)+\varrho r'=0 \tag{7}$$

Умножая (5) на α, (6) на l, (7) на λ и складывая, получимъ въ силу (I′, 1) и (II′, 1 и 3) § 6:

$$\xi-x=lr-\lambda\varrho r'. \tag{8}$$

Точно такъ же, умножая (5) на β, (6) на m, (7) на μ и складывая, получимъ въ силу (I′, 2) и (II′, 1 и 2) §-а 6:

$$\eta-y=mr-\mu\varrho r'. \tag{9}$$

Наконецъ, умножая (5) на γ, (6) на n, (7) на ν и складывая, найдемъ:

$$\zeta-z=nr-\nu\varrho r'. \tag{10}$$

Возвышая (8), (9) и (10) въ квадратъ и складывая, получимъ по (1):

$$R^2=r^2+\varrho^2 r'^2, \tag{11}$$

[съ помощью (I, 2 и 3) и (II, 3) § 6].

Координаты центра соприкасающагося шара опредѣляются тремя уравненіями (5), (6) и (7), т. е. какъ пересѣченіе трехъ опредѣляемыхъ ими плоскостей,—параллельныхъ плоскостямъ основного тріэдра: a) нормальной плоскости (5), b) плоскости (7), параллельной соприкасающейся и находящейся отъ нея на разстояніи, равномъ $\varrho r'$, и c) плоскости (6), параллельной выпрямляющей, находящейся отъ нея на разстояніи, равномъ r. Плоскости (5) и (6) опредѣляютъ такимъ образомъ прямую, перпендикулярную къ соприкасающейся плоскости. Эта прямая встрѣчаетъ соприкасающуюся плоскость въ центрѣ круга, по которому пересѣкается съ нею соприкасающійся шаръ. Координаты точки встрѣчи опредѣляются, слѣдовательно, уравненіями: (5), (6) и

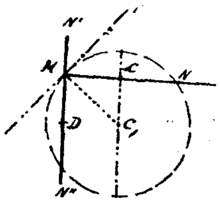
$$\lambda(\xi - x) + \mu(\eta - y) + \nu(\zeta - z) = 0.$$

Такъ же, какъ и выше, отсюда найдемъ:

$$\xi - x = lr, \quad \eta - y = mr, \quad \zeta - z = nr, \tag{12}$$

такъ что радіусъ круга сѣченія равенъ r — радіусу кривизны. Такимъ образомъ *кругомъ кривизны для кривой въ пространствѣ является кругъ, по которому пересѣкаетъ соприкасающаяся плоскость соприкасающійся шаръ точки кривой.* Его центръ—центръ первой кривизны—лежитъ на главной нормали. Центръ первой кривизны лежитъ также вмѣстѣ съ центромъ соприкасающагося шара на прямой (5), (6), которая называется *осью кривизны или полярной кривой.* Разстояніе между этими двумя точками равно $\varrho r'$.

Чтобы яснѣе представить себѣ взаимное расположеніе всѣхъ перечисленныхъ линій, вообразимъ себѣ, что плоскость чертежа есть нормальная плоскость въ точкѣ M кривой, такъ что касательная перпендикулярна въ M къ плоскости чертежа. Соприкасающійся шаръ пересѣкается нормальною плоскостью по большему кругу съ центромъ въ C_1. MN'—бинормаль, MN—главная нормаль и C (средина MN)—центръ кривизны (первой). MC и MC_1—радіусъ 1-ой кривизны и радіусъ соприкасающагося шара. Изъ чертежа видно также что $CC_1 = \varrho r'$ равна MD—радіусу круга, по которому соприкасающійся шаръ пересѣкается выпрямляющей плоскостью.



Черт. 43.

Можно присоединить къ этому еще, что уравненіе плоскости, касательной къ соприкасающемуся шару, какъ перпендикулярной къ радіусу его MC_1, напишется:

$$\begin{gathered} r\,[l(X - x) + m(Y - y) + n(Z - z)] - \\ - \varrho r'\,[\lambda(X - x) + \mu(Y - y) + \nu(Z - z)] = 0; \end{gathered} \tag{13}$$

она, очевидно, проходитъ черезъ касательную къ кривой въ точкѣ M. Уравненіе прямой, по которой нормальная плоскость пересѣкается съ этою плоскостью, напишется:

$$\frac{X - x}{r\lambda - l\varrho r'} = \frac{Y - y}{r\mu - m\varrho r'} = \frac{Z - z}{r\nu - n\varrho r'}, \tag{14}$$

а уравненіе радіуса MC_1 съ помощью (8), (9) и (10) можетъ быть получено подъ видомъ:

$$\frac{X-x}{lr-\lambda\varrho r'}=\frac{Y-y}{mr-\mu\varrho r'}=\frac{Z-z}{nr-\nu\varrho r'}. \tag{15}$$

§ 10. Нѣкоторые частные типы кривыхъ въ пространствѣ.

a) Линіи, для которыхъ первая кривизна равна 0 *(и* $r=\infty$*) суть прямыя.*

Дѣйствительно, если

$$K=\sqrt{x_s''^2+y_s''^2+z_s''^2}=0, \tag{1}$$

то при вещественныхъ функціяхъ x'', y'', z'' должно быть въ отдѣльности

$$x_s''=0,\quad y_s''=0,\quad z_s''=0,$$

и, слѣдовательно,

$$x_s'=c,\quad y_s'=c_1,\quad z_s'=c_2,$$

т. е.

$$x=c\,.\,s+\partial,\quad y=c_1\,.\,s+\partial_1,\quad z=c_2\,.\,s+\partial_2,$$

гдѣ c_i и ∂_i — произвольныя постоянныя, и потому

$$\frac{x-\partial}{c}=\frac{y-\partial_1}{c_1}=\frac{z-\partial_2}{c_2}, \tag{2}$$

а это — уравненія прямой линіи.

Если обратимся къ выраженію для мѣры крученія, то замѣтимъ, что опредѣлитель третьяго порядка, составленный изъ производныхъ x, y, z по s трехъ первыхъ порядковъ, имѣетъ двѣ строки, члены которыхъ обращаются для прямой въ нули. Поэтому *мѣра крученія для прямой есть величина неопредѣленная.* И дѣйствительно, всякая плоскость, проходящая черезъ прямую, является ея соприкасающеюся плоскостью, а потому и уголъ крученія величина совершенно неопредѣленная.

b) Кривыя, для которыхъ мѣра крученія равна нулю, суть кривыя плоскія.

Если отбросить случай $r=\infty$, $K=0$, когда, какъ сейчасъ видѣли, получается прямая линія, условіе $K=0$ сводится къ уравненію:

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

которое, какъ показано въ § 1, выполняется кривыми плоскими. Теперь мы покажемъ, что обратно, если уравненіе (3) удовлетворяется, то кривая

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

будетъ плоская, т. е. φ, ψ, χ удовлетворяютъ линейному соотношенію съ постоянными коэффиціентами. Разложимъ (3) по элементамъ послѣдней строки; имѣемъ:

$$x'''(y'z'' - z'y'') + y'''(z'x'' - x'z'') + z'''(x'y'' - y'x'') = 0. \tag{3'}$$

Множители при x''', y''', z''' пропорціональны коэффиціентамъ A, B, C уравненія соприкасающейся плоскости. Замѣняя эти множители на A, B, C, получимъ:

$$Ax''' + By''' + Cz''' = 0 \tag{4}$$

Но A, B, C связаны соотношеніями:

$$Ax' + By' + Cz' = 0, \tag{5}$$

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0. \tag{6}$$

Дифференцируя эти два уравненія, получимъ:

$$Ax'' + By'' + Cz'' + (A'x' + B'y' + C'z') = 0,$$

$$Ax''' + By''' + Cz''' + (A'x'' + B'y'' + C'z'') = 0,$$

уравненія, которыя съ помощью (6) и (4) приводятся къ виду:

$$A'x' + B'y' + C'z' = 0, \tag{7}$$

$$A'x'' + B'y'' + C'z'' = 0. \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8) съ (5) и (6), видимъ, что A', B', C' должны быть соотвѣтственно пропорціональны A, B, C:

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}. \tag{9}$$

Если A B C всѣ отличны отъ 0, то (9) даютъ:

$$(\lg A)' = (\lg B)' = (\lg C)',$$

или:

$$\lg A - \lg C = \lg p,$$

$$\lg B - \lg C = \lg q,$$

гдѣ p и q произвольныя постоянныя. Такимъ образомъ

$$A = C \,.\, p\,, \quad B = C \,.\, q.$$

Подставляя эти значенія въ (5) и сокращая на $C \neq 0$, имѣемъ:

$$px' + qy' + z' = 0\,,$$

откуда

$$px + qy + z = a = \mathrm{Const}.$$

т. е. x, y, z дѣйствительно связаны линейнымъ соотношеніемъ съ постоянными коэффиціентами при всякомъ значеніи t; всѣ точки кривой лежатъ въ одной плоскости.

Остался случай, когда одинъ изъ коэффиціентовъ, напримѣръ, C равенъ нулю. Это значитъ что

$$x'y'' - y'x'' = 0\,,$$

$$\frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''} \quad \text{или} \quad (\lg y')' = (\lg x')',$$

слѣдовательно

$$\lg y' = \lg x' + \lg c \quad \text{и} \quad y' = cx',$$

что даетъ

$$y = cx + \partial\,,$$

т. е. снова между x, y (и z) существуетъ линейная зависимость: всѣ точки кривой лежатъ въ одной плоскости, параллельной плоскости, параллельной плоскости XOY.— Если два коэффиціента равны нулю, напримѣръ $A = 0$ и $B = 0$, т. е.

$$y'z'' - z'y'' = 0\,, \quad z'x'' - x'z'' = 0\,,$$

то

$$\frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''} = \frac{z'}{z''}\,,$$

слѣдовательно и третій C равенъ нулю, уравненіе соприкасающейся плоскости неопредѣленно, мѣра первой кривизны равна нулю, получаемъ прямую. Такимъ образомъ, *если (3) выполнено, то кривая плоская.*

c) Кривыя, которыхъ первая кривизна постоянная (но мѣра крученія не равна нулю): предполагая $K = \mathrm{Const.}$, а слѣдовательно, отбрасывая случаи $K = 0$ и $K = \infty$, $r = \mathrm{Const.}$, имѣемъ $r = 0$. По формулѣ (11) § 9 радіусъ соприкасающагося шара будетъ $R = r$ — равенъ радіусу первой кривизны: всѣ соприкасающіеся шары въ различныхъ точкахъ такой кривой одинаковы; притомъ центръ соприкасающагося шара и центръ первой кривизны совпадаютъ ($\rho r' = 0$) и соприкасающаяся плоскость въ каждой точкѣ проходитъ черезъ центръ соприкасающагося шара. Такія кривыя E. Cesàro [1]) называетъ *косыми кругами.*

d) Сферическія кривыя. Если не только радіусъ, но и координаты центра соприкасающагося шара должны быть одинаковы. т. е. соприкасающійся шаръ долженъ быть одинъ и тотъ же для всѣхъ точекъ кривой, то кривая должна вся лежать на этомъ шарѣ; такая кривая называется *сферическою.* Выведемъ условіе, чтобы кривая была сферическою; предполагаемъ, что независимое перемѣнное—дуга; должно быть

$$\frac{d}{ds}(R^2) = 0, \quad \frac{d}{ds}(\xi) = 0, \quad \frac{d}{ds}(\eta) = 0, \quad \frac{d}{ds}(\zeta) = 0.$$

Первое даетъ

$$0 = 2(rr' + \rho\rho' r'^2 + \rho^2 r' r'') = 2\rho r'\left(\frac{r}{\rho} + \rho' r' + \rho r''\right),$$

или

$$0 = 2\rho r'\left(\frac{r}{\rho} + (\rho r')'\right).$$

Далѣе:

$$0 = \frac{d(\xi)}{ds} = \frac{d}{ds}(x + lr - \lambda\rho r') = x' + l'r + lr' - \lambda . \rho r' - \lambda(\rho r')',$$

или съ помощію (3), (8) и (7) § 8:

$$0 = \alpha + r\left(-\frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{\rho}\right) + lr' - \frac{l\rho r'}{\rho} - \lambda(\rho r')' = -\lambda\left(\frac{r}{\rho} + (\rho r')'\right).$$

Подобнымъ образомъ

$$0 = \frac{d(\eta)}{ds} = -\mu\left(\frac{r}{\rho} + (\rho r')'\right),$$

$$0 = \frac{d(\zeta)}{ds} = -\nu\left(\frac{r}{\rho} + (\rho r')'\right).$$

Связанныя между собою соотношеніемъ: $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, величины λ, μ, ν одновременно въ нуль обращаться не могутъ. Поэтому должно быть:

$$\frac{r}{\rho} + (\rho r')' = 0,$$

или

$$\frac{r}{\rho} + \rho' r' + \rho r'' = 0. \tag{10}$$

[1]) Geometria intrinseca, p. 144.

При этомъ выполнено и условіе

$$\frac{d(R^2)}{ds} = 0.$$

Соединяя точку сферической кривой съ центромъ сферы, получимъ нормаль къ поверхности и къ сферической кривой; эта прямая лежитъ въ нормальной плоскости; такимъ образомъ *всѣ нормальныя плоскости сферической кривой проходятъ черезъ одну точку—центръ сферы.* Аналитически убѣдимся въ этомъ, умножая равенства $\xi - x = l.r$, $\eta - y = m.r$, $\zeta - z = n.r$ соотвѣтственно на $x' = \alpha$, $y' = \beta$, $z' = \gamma$ и складывая; съ помощью II. 1 § 6 получимъ:

$$x'(\xi - x) + y'(\eta - y) + z'(\zeta - z) = 0,$$

т. е. координаты центра сферы удовлетворяютъ уравненію нормальной плоскости.— Далѣе, *опуская изъ центра сферы перпендикуляръ на соприкасающуюся плоскость какой-нибудь точки, получимъ въ проэкціи центръ первой кривизны этой точки.*

е) Винтовая линія,— замѣчательная кривая въ пространствѣ, которая характеризуется тѣмъ свойствомъ, что она лежитъ на прямомъ круговомъ цилиндрѣ и встрѣчаетъ всѣ его образующія подъ однимъ и тѣмъ же угломъ [1]).

Эту линію можно, слѣдовательно, получить, навивая на такой цилиндръ плоскій уголъ такъ, чтобы одна сторона навилась на основаніе цилиндра; тогда другая сторона опишетъ винтовую линію. Различаютъ винтовыя линіи—правую и лѣвую, смотря по направленію навиванія.

Уравненія кривой можно получить изъ того или другого опредѣленія. Дѣйствительно, пусть основаніе цилиндра есть кругъ $x^2 + y^2 = a^2$ въ плоскости XOY, а кривая дѣлаетъ съ осью Z-овъ уголъ $\varphi = \mathrm{Const}$. Тогда:

$$\gamma' = 0, \quad \gamma = \cos\varphi = m, \quad z'_s = m;$$

слѣдовательно

$$z = ms + c.$$

Постоянную c опредѣлимъ условіемъ, что началомъ дугъ будемъ считать точку встрѣчи кривой съ плоскостію XOY; тогда

$$c = 0 \quad \text{и} \quad z = ms = s\cos\varphi.$$

Двѣ другія координаты точки кривой суть координаты ея проэкціи на плоскость XOY, которая лежитъ на кругѣ; и, слѣдовательно, если направить ось X-овъ въ начало дугъ, то

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t.$$

1) Если этотъ уголъ прямой, то получимъ въ частности окружность.

Но $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Подставляя

$$dx = -a \sin t \,.\, dt,$$

$$dy = a \cos t \,.\, dt,$$

$$dz = m\, ds = ds \cos\varphi,$$

имѣемъ:

$$ds^2 (1 - m^2) = ds^2 \,.\, \sin^2\varphi = a^2 dt^2$$

или

$$ds = \pm \frac{a}{\sin\varphi} dt;$$

откуда

$$s = \pm \frac{a}{\sin\varphi} \,.\, t$$

въ силу условія $t = 0$ при $s = 0$. Двойной знакъ соотвѣтствуетъ правой или лѣвой винтовымъ линіямъ. Ограничимся однимъ знакомъ $(+)$ для простоты. Тогда

$$t = \frac{s \,.\, \sin\varphi}{a}$$

и уравненія принимаютъ видъ;

$$x = a \,.\, \cos\left(\frac{\sin\varphi}{a} s\right), \quad y = a \sin\left(\frac{\sin\varphi}{a} s\right), \quad z = s \cos\varphi.$$

Отсюда находимъ:

$$x' = -\sin\varphi \,.\, \sin\left(\frac{\sin\varphi}{a} s\right), \quad x'' = -\frac{\sin^2\varphi}{a} \cos\left(\frac{\sin\varphi}{a} s\right),$$

$$x''' = + \frac{\sin^3\varphi}{a^2} \sin\left(\frac{\sin\varphi}{a} s\right).$$

$$y' = \sin\varphi \,.\, \cos\left(\frac{\sin\varphi}{a} s\right), \quad y'' = -\frac{\sin^2\varphi}{a} \sin\left(\frac{\sin\varphi}{a} s\right),$$

$$y''' = -\frac{\sin^3\varphi}{a^2} \cos\left(\frac{\sin\varphi}{a} s\right);$$

$$z' = \cos\varphi, \quad z'' = z''' = 0.$$

Поэтому

$$\frac{1}{r^2} = x''^2_s + y''^2_s + z''^2_s = \left(\frac{\sin^2\varphi}{a}\right)^2,$$

или

$$r = \frac{a}{\sin^2\varphi} = \text{Const}.$$

Далѣе,

$$\frac{1}{\varrho}=-r^2\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}=-\frac{a^2}{\sin^4\varphi}\begin{vmatrix} x' & y' & \cos\varphi \\ x'' & y'' & 0 \\ x''' & y''' & 0 \end{vmatrix}=\frac{a^2 . \cos\varphi}{\sin^4\varphi}(x''y'''-y''x''')$$

Но

$$x''y'''-x'''y''=\frac{\sin^5\varphi}{a^3}.$$

Такимъ образомъ

$$\frac{1}{\varrho}=-\frac{\sin\varphi . \cos\varphi}{a} \quad \text{или} \quad \varrho=-\frac{2a}{\sin 2\varphi}=\text{Const}.$$

Итакъ, *винтовая линія*, начерченная на прямомъ круговомъ цилиндрѣ, *имѣетъ постоянную кривизну и постоянное крученіе.*

Винтовая линія представляетъ, очевидно, частный случай косого круга, и радіусъ *соприкасающейся* сферы во всѣхъ точкахъ ея одинаковъ. Винтовая линія есть единственная линія, у которой постоянны оба радіуса 1-ой и 2-ой кривизны. Доказать это можно такъ. На основаніи формулъ Френэ-Серре

$$\frac{\alpha'}{\lambda'}=\frac{\beta'}{\mu'}=\frac{\gamma'}{\nu'}=\frac{\varrho}{r}. \tag{1}$$

Если ϱ и r постоянны, это отношеніе постоянно. Означимъ его черезъ k. Имѣемъ:

$$\alpha'-k . \lambda'=0, \quad \beta'-k . \mu'=0, \quad \gamma'-k . \nu'=0.$$

Слѣдовательно, если обозначить нѣкоторыя постоянныя C, D, E:

$$\alpha-k\lambda=C, \quad \beta-k\mu=D, \quad \gamma-k . \nu=E. \tag{2}$$

Умножая эти равенства на l, m, n соотвѣтственно и складывая, въ силу (II, 3) § 6 получимъ

$$C . l+D . m+E . n=0. \tag{3}$$

Соотношеніе это показываетъ, что главная нормаль разсматриваемой кривой перпендикулярна къ направленію

$$\left(\frac{C}{\sqrt{C^2+D^2+E^2}}, \frac{D}{\sqrt{C^2+D^2+E^2}}, \frac{E}{\sqrt{C^2+D^2+E^2}}\right)$$

Примемъ это направленіе за ось z-овъ. Тогда

$$n=0 \tag{4}$$

и такъ какъ

$$n = r \cdot z'',$$

то

$$z' = \gamma = k_1, \tag{5}$$

$$z = k_1 s + k_2.$$

Можемъ такъ выбрать начало координатъ, что $k_2 = 0$, и слѣдовательно

$$z = k_1 s. \tag{6}$$

Но изъ послѣдняго уравненія (2)

$$v = \frac{\gamma - E}{k} = \frac{k_1 - E}{k} = \text{Const.}$$

т. е.

$$x'y'' - y'x'' = \frac{k_1 - E}{k \cdot r} = \text{Const.}$$

Такъ какъ кромѣ того въ силу (5):

$$x'^2 + y'^2 = 1 - k_1^2, \tag{7}$$

то

$$\frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2} = \frac{k_1 - E}{kr \cdot (1 - k_1^2)} = \text{пост.} = \varkappa,$$

или по раздѣленіи числителя и знаменателя на x'^2:

$$\left(\operatorname{arctang} \frac{y'}{x'}\right)' = \varkappa,$$

и слѣдовательно

$$\frac{y'}{x'} = \operatorname{tang}(\varkappa s + \varkappa');$$

съ помощью (7) отсюда выводимъ:

$$x' = \pm \cos(\varkappa s + \varkappa')$$

$$y' = \pm \sin(\varkappa s + \varkappa')$$

т. е.

$$\begin{aligned} x - a &= \pm \frac{1}{\varkappa} \sin(\varkappa s + \varkappa') \\ y - b &= \mp \frac{1}{\varkappa} \cos(\varkappa s + \varkappa'). \end{aligned} \tag{8}$$

Уравненія (5) и (8) опредѣляютъ винтовую линію.

Отмѣтимъ, что свойство, выражаемое уравненіемъ (3), выведено только въ предположеніи, что постоянно отношеніе радіусовъ первой и второй кривизны, т. е. принадлежитъ всѣмъ кривымъ, для которыхъ радіусы 1-ой и 2-ой кривизны находятся въ постоянномъ отношеніи. Для всѣхъ такихъ кривыхъ, слѣдовательно, уголъ главной нормали съ опредѣленнымъ направленіемъ прямой и уголъ касательной съ тѣмъ же направленіемъ есть величина постоянная. Если слѣдовательно помянутое постоянное направленіе принять за ось z-овъ и соотвѣтственнымъ образомъ выбрать на немъ начало координатъ, а также начало дугъ, то такія кривыя выразятся уравненіями:

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = m.s.$$

Это уравненіе линіи, лежащей на поверхности цилиндра

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s)$$

и составляющей съ его образующими постоянный уголъ. Всѣ такія линіи называются также цилиндрическими винтовыми линіями, и въ отличіе линія, лежащая на поверхности прямого кругового цилиндра, называется обыкновенною или круговою винтовою линіей.

Замѣчательный и обширный классъ кривыхъ въ пространствѣ представляютъ *кривыя Бертрана*,— такъ называются кривыя, въ которыхъ первая и вторая кривизна связаны линейнымъ соотношеніемъ съ постоянными коэффиціентами

$$\frac{a}{r} + \frac{b}{\varrho} = 1.$$

При $b = 0$ имѣемъ $r = a$, т. е. косые круги суть кривыя Бертрана; при $a = 0$ имѣемъ $\varrho = b$, т. е. кривою Бертрана будетъ всякая кривая постояннаго крученія, стало быть въ частности и всякая плоская кривая. Винтовыя линіи можно также разсматривать, какъ предѣльный случай кривыхъ Бертрана,— если принять что a и b стремятся къ безконечности, но что ихъ отношеніе стремится къ предѣлу $\cos\varepsilon$:

$$\lim_{\substack{a=\infty \\ b=\infty}} \frac{b}{a} = \cos\varepsilon.$$

Тогда уравненіе (9) принимаетъ видъ уравненія

$$r = -\varrho \, . \, \operatorname{tang}\varepsilon,$$

характеризующаго винтовыя линіи.

§ 11. Огибающія семейства поверхностей (перваго рода).

Разсмотримъ совокупность поверхностей, опредѣленныхъ уравненіемъ

$$F(x, y, z, a) = 0, \tag{1}$$

содержащимъ параметръ a, который можетъ принимать всевозможныя значенія. Соотвѣтственно каждому значенію параметра имѣемъ опредѣленную поверхность семейства. Двѣ сосѣднія поверхности соотвѣтствующія значеніямъ параметра a и $a + da$, пересѣкаются по кривой, которая называется *характеристикой* и которая опредѣлится уравненіями (1) и

$$F(x, y, z, a + da) = 0. \tag{1'}$$

Послѣднее замѣнимъ уравненіемъ

$$\frac{1}{da}[F(x, y, z, a + da) - F(x, y, z, a)] = 0, \tag{2}$$

опредѣляющимъ поверхность, проходящую черезъ ту же характеристику. Если въ $F(x, y, z, a)$ параметръ a входитъ такъ, что первая и вторая производныя по a непрерывны, то (2) замѣнится уравненіемъ

$$F'_a(x, y, z, a) + \tfrac{1}{2} da . F''_{a^2}(x, y, z, a + \theta da) = 0,$$

или въ предѣлѣ для $da = 0$:

$$F'_a(x, y, z, a) = 0. \tag{3}$$

Для каждаго значенія a уравненія (1) съ (3) опредѣляютъ *характеристику*, и огибающая семейства поверхностей (1) есть геометрическое мѣсто характеристикъ, соотвѣтствующихъ всевозможнымъ значеніямъ параметра a. Ея уравненіе получимъ, исключая a изъ уравненій (1) и (3).

Характеристика, соотвѣтствующая нѣкоторому опредѣленному значенію параметра a, встрѣчаетъ поверхность безконечно-близкую къ соотвѣтствующей этому значенію поверхности въ точкахъ, опредѣляемыхъ уравненіями (1), (3) и уравненіемъ (1'). Въ силу двухъ первыхъ послѣднее можно замѣнить другимъ,— именно: разлагая (1') по строкѣ Taylor'а и принимая во вниманіе (1) и (3), получимъ по раздѣленіи на da^2:

$$\tfrac{1}{2} F''_{a^2}(x, y, z, a) + \tfrac{1}{6} da\, F'''_{a^3}(x, y, z, a + \theta da) = 0,$$

что въ предѣлѣ обращается въ

$$F''_{a^2}(x, y, z, a) = 0. \tag{4}$$

Итакъ, предѣльныя точки пересѣченія опредѣлятся уравненіями (1), (3) и (4); онѣ называются *характеристическими точками*. Геометрическое мѣсто ихъ — кривая, уравненія которой получимъ, исключая a изъ (1), (3) и (4). Она называется *ребромъ возврата* огибающей поверхности.

Теорема I. *Огибающая касается каждой поверхности семейства вдоль соотвѣтственной характеристической линіи.*

Уравненіе огибающей мы можемъ разсматривать, какъ результатъ подстановки въ (1) значенія $a = \varphi(x, y, z)$, полученнаго рѣшеніемъ (3) относительно a. Пусть a_0 нѣкоторое значеніе параметра, тогда

$$F(x, y, z, a_0) = 0, \tag{1_0}$$

$$F'_a(x, y, z, a_0) = 0, \tag{3_0}$$

соотвѣтственная характеристика.

Пусть x_0, y_0, z_0 какая нибудь ея точка, такъ что

$$F(x_0, y_0, z_0, a_0) = 0, \tag{$1'_0$}$$

$$F'_a(x_0, y_0, z_0, a_0) = 0; \tag{$3'_0$}$$

послѣднее показываетъ, что $\varphi(x_0, y_0, z_0) = a_0$.

Касательная къ $F(x, y, z, a_0) = 0$ въ точкѣ (x_0, y_0, z_0) имѣетъ уравненіе

$$\begin{aligned} 0 = F'_x(x_0, y_0, z_0, a_0)(X - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0, a_0)(Y - y_0) + \\ + F'_z(x_0, y_0, z_0, a_0)(Z - z_0), \end{aligned} \tag{5}$$

а касательная къ огибающей въ точкѣ (x, y, z)

$$0 = (F'_x + F'_a . a'_x)(X - x) + (F'_y + F'_a . a'_y)(Y - y) + (F'_z + F'_a . a'_z)(Z - z).$$

Съ помощью (3) это уравненіе сводится къ

$$\begin{aligned} 0 = F'_x(x, y, z, \varphi)(X - x) + F'_y(x, y, z, \varphi)(Y - y) + \\ + F'_z(x, y, z, \varphi)(Z - z). \end{aligned} \tag{6}$$

Для точки (x_0, y_0, z_0) $\varphi(x_0, y_0, z_0) = a_0$ и, слѣдовательно, (6) совпадаетъ съ (5). То же самое имѣетъ мѣсто и во всякой другой точкѣ той же характеристики, потому что для каждой точки ея $\varphi(x, y, z)$ принимаетъ одно и то же значеніе a_0.

Теорема 2. *Ребро возврата касается въ характеристической точкѣ соотвѣтственной характеристики, а съ соотвѣтственной поверхностью семьи имѣетъ въ ней соприкосновеніе 2-го порядка.*

Пусть снова a_0 — значеніе параметра, (1_0) — соотвѣтствующая поверхность семейства, (1_0), (3_0)—соотвѣтствующая характеристика и пусть (x_0, y_0, z_0)—соотвѣтствующая характеристическая точка, которая кромѣ $(1'_0)$ и $(3'_0)$ выполняетъ и уравненіе

$$F''_{a^2}(x_0, y_0, z_0, a_0) = 0. \tag{$4'_0$}$$

Считая, что ребро возврата опредѣляется уравненіями (1) и (3), въ которыхъ внесено получаемое изъ (4) значеніе

$$a = \psi(x, y, z),$$

имѣемъ вслѣдствіе $(4'_0)$:

$$\psi(x_0, y_0, z_0) = a_0.$$

Уравненія касательной къ характеристикѣ могутъ быть написаны:

$$\left.\begin{aligned} &F'_x(x, y, z, a_0)(X-x) + F'_y(x, y, z, a_0)(Y-y) + \\ &\quad + F'_z(x, y, z, a_0)(Z-z) = 0, \\ &F''_{ax}(x, y, z, a_0)(X-x) + F''_{ay}(x, y, z, a_0)(Y-y) + \\ &\quad + F''_{az}(x, y, z, a_0)(Z-z) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

а касательной къ ребру возврата:

$$\left.\begin{aligned} &(F'_x+F'_a.\psi'_x)(X-x) + (F'_y+F'_a.\psi'_y)(Y-y) + (F'_z+F'_a.\psi'_z)(Z-z) = 0, \\ &(F''_{ax}+F''_{a^2}.\psi'_x)(X-x)(F''_{ay}+F''_{a^2}.\psi'_x)(Y-y) + (F'_{az}+F'_{a^2}.\psi'_z)(Z-z) = 0; \end{aligned}\right\}$$

послѣднія съ помощью (3) и (4) сводятся къ виду:

$$\left.\begin{aligned} &0 = F'_x(x, y, z, \psi)(X-x) + F'_y(x, y, z, \psi)(Y-y) + \\ &\quad + F'_z(x, y, z, \psi)(Z-z), \\ &0 = F''_{ax}(x, y, z, \psi)(X-x) + F''_{ay}(x, y, z, \psi)(Y-y) + \\ &\quad 0 = F''_{az}(x, y, z, \psi)(Z-z). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Для характеристической точки (x_0, y_0, z_0) функція $\psi(x, y, z)$ принимаетъ значеніе a_0, и, слѣдовательно, (8) приводится къ (7).

Чтобы доказать вторую часть теоремы, возьмемъ на *ребрѣ возврата* точку (x_1, y_1, z_1) безконечно-близкую къ (x_0, y_0, z_0) и пусть a_1— соотвѣтственное значенiе параметра, безконечно-близкое къ a_0. Стало быть

$$F''_{a^2}(x_1, y_1, z_1, a_1)=0;$$

замѣняя здѣсь

$$a_1=a_0+(a_1-a_0),\ x_1=x_0+(x_1-x_0),\ y_1=y_0+(y_1-y_0),\ z_1=z_0+(z_1-z_0)$$

и раскладывая по строкѣ Taylor'a, получимъ:

$$0=F''_{a^2}(x_0, y_0, z_0, a_0)+(F'''_{a^2x})_0(x_1-x_0)+(F'''_{a^2y})_0(y_1-y_0)+$$
$$+(F'''_{a^2z})_0(z_1-z_0)+(F'''_{a^3})_0(a_1-a_0)+\ldots.$$

предполагая, что $(F'''_{a^3})_0 \neq 0$, и припомнивъ $(4'_0)$, заключаемъ:

изъ разностей (x_1-x_0), (y_1-y_0), (z_1-z_0)— та, которая низшаго порядка, должна быть одного порядка съ (a_1-a_0), т. е. a_1-a_0 одного порядка съ

$$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}.$$

Подставляя же координаты точки (x_1, y_1, z_1) въ уравненiе

$$F(x, y, z, a_0)=0,$$

получимъ:

$$F(x_1, y_1, z_1, a_0)=F(x_1, y_1, z_1, (a_1+a_0-a_1))=$$
$$=F(x_1, y_1, z_1, a_1)-(a_1-a_0)F'_a(x_1, y_1, z_1, a_1)+$$
$$+\frac{(a_1-a_0)^2}{1.2}F''_{a^2}(x_1, y_1, z_1, a_1)-\frac{(a_1-a_0)^3}{1.2.3}F'''_{a^3}(x_1, y_1, z_1, a_1)+\ldots$$

Но (x_1, y_1, z_1)— точка ребра возврата, и a_1— соотвѣтствующее значенiе параметра, слѣдовательно,

$$F(x_1, y_1, z_1, a_1)=0,\ F'_a(x_1, y_1, z_1, a_1)=0,\ \ F''_{a^2}(x_1, y_1, z_1, a_1)=0$$

и по предположенiю

$$F'''_{a^3}(x_1, y_1, z_1, a_1)\neq 0.$$

Поэтому $F(x_1, y_1, z_1, a_0)$—*третьяго порядка относительно* (a_1-a_0), т. е. по выше-доказанному 3-го порядка относительно d,— что и доказываетъ существованiе прикосновенiя 2-го порядка (ср. § 4).

§ 12. Развертывающіяся поверхности и кривыя двоякой кривизны.

Замѣчательный случай огибающихъ представляютъ такъ называемыя *развертывающіяся поверхности,*— огибающія семейства плоскостей, заданныхъ уравненіемъ:

$$u(a).x+v(a).y+\omega(a).z+\tilde{\omega}(a)=0\,, \tag{1}$$

коэффиціенты котораго зависятъ отъ одного параметра a; по предыдущему §-у огибающая получается, если вмѣстѣ съ (1) разсматривать уравненіе:

$$u'(a).x+v'(a).y+\omega'(a).z+\tilde{\omega}'(a)=0\,, \tag{2}$$

гдѣ $u'(a)$, $v'(a)$ и т. д. означаютъ производныя отъ $u(a)$, $v(a)$ и т. д. по параметру a.

Исключая a изъ (1) и (2), получимъ уравненіе огибающей въ обычномъ видѣ. При каждомъ значеніи параметра (1) и (2) опредѣляютъ прямую линію, которая и будетъ характеристической линіей развертывающейся поверхности. По этой прямой соотвѣтствующая плоскость (1) касается развертывающейся; такую прямую называютъ также *образующей* развертывающейся поверхности. На каждой образующей находится одна характеристическая точка, опредѣляемая уравненіями (1), (2) и

$$u''(a).x+v''(a).y+\omega''(a).z+\tilde{\omega}''(a)=0. \tag{3}$$

Мѣстомъ этихъ характеристическихъ точекъ является кривая (ребро возврата), которая, по доказанному выше, касается характеристики, т. е. имѣетъ въ каждой точкѣ касательною соотвѣтствующую образующую, а съ плоскостью (1) имѣетъ соприкосновеніе 2-го порядка, т. е. (1) служитъ для ребра возврата соприкасающейся плоскостью. Такимъ образомъ съ каждой развертывающейся поверхностью связывается кривая двоякой кривизны. Обратно, разсмотримъ *огибающую соприкасающихся плоскостей нѣкоторой кривой двоякой кривизны:*

$$\lambda(X-x)+\mu(Y-y)+\nu(Z-z)=0. \tag{a}$$

Производная по параметру s даетъ:

$$\lambda'(X-x)+\mu'(Y-y)+\nu'(Z-z)-(\lambda x'+\mu y'+\nu z')=0\,,$$

или съ помощью (7) и (11) § 8 и (II_2) § 6:

$$\frac{1}{\varrho}[l(X-x)+m(Y-y)+n(Z-z)]=0\,; \tag{b}$$

т. о. характеристикою является прямая пересѣченія соприкасающейся и выпрямляющей плоскостей, т. е. касательная къ кривой. Чтобы получить на характеристикѣ характеристическую точку, дифференцируемъ еще разъ (b), отбросивъ множитель $\frac{1}{\varrho}$. Получимъ:

$$0 = l'(X-x) + m'(Y-y) + n'(Z-z) - (lx' + my' + nz'),$$

послѣднее уравненіе выражаетъ плоскость, проходящую черезъ главную нормаль и при рѣшеніи совмѣстно съ (a) и (b) можетъ быть замѣнено черезъ

$$\text{(c)} \qquad 0 = \alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z).$$

Помножая (a) на λ, (b) (гдѣ $\frac{1}{\varrho}$ отброшено) на l, (c) на α и складывая, получимъ: $X - x = 0$; точно такъ же, умножая соотвѣтственно на μ, m, β: $Y - y = 0$, и умножая на ν, n и γ: $Z - z = 0$. Три плоскости имѣютъ одну общую точку—точку кривой; *всякая кривая двоякой кривизны* такимъ образомъ *является ребромъ возврата нѣкоторой развертывающейся поверхности, огибаемой ея соприкасающимися плоскостями, а характеристиками являются ея касательныя.*

Названіе „ребро возврата“ для геометрическаго мѣста характеристическихъ точекъ развертывающейся объясняется слѣдующимъ его свойствомъ: *кривая, по которой какая-нибудь плоскость пересѣкаетъ развертывающуюся, въ точкахъ пересѣченія этой плоскости съ ребромъ возврата имѣетъ точки возврата.*

Достаточно показать это для какой-нибудь плоскости, напримѣръ XOY, не занимающей особеннаго положенія относительно кривой.

Изъ уравненій касательной къ кривой двоякой кривизны при $z = 0$ получимъ для координатъ точки встрѣчи касательной съ плоскостью XOY:

$$\text{(d)} \qquad X = x - \frac{\alpha z}{\gamma}, \quad Y = y - \frac{\beta z}{\gamma}.$$

При перемѣнномъ s это суть въ тоже время уравненія въ параметрической формѣ кривой, по которой XOY пересѣкаетъ развертывающуюся поверхность — геометрическое мѣсто касательныхъ къ кривой двоякой кривизны, которую можно называть короче: *поверхность касательныхъ* (Tangentenfläche).

Отсюда, взявъ производную по s, получимъ съ помощью формулъ Frenet-Serret:

$$X' = -\frac{\mu z}{r.\gamma^2}, \quad Y' = +\frac{\lambda z}{r.\gamma^2}.$$

Въ точкѣ встрѣчи кривой двоякой кривизны съ плоскостью XOY $z=0$, **и слѣдовательно,**

$$X'=0, \quad Y'=0,$$

т. е. эта точка есть точка особенная на плоской кривой (d).

При томъ

$$\frac{d^2Y}{dX^2}=\frac{1}{X'}\left(\frac{Y'}{X'}\right)'=-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)':-\frac{\mu z}{r.\gamma^2}=\frac{m\lambda-l\mu}{\varrho.\mu^2}\cdot\frac{r\gamma^2}{\mu.z}=-\frac{r\gamma^3}{\varrho.\mu^3.z},$$

при $z=0$ обращается въ безконечность. Итакъ, это точка возврата.

Примѣръ. Поверхность касательныхъ винтовой линіи:

$$x=a.\cos t, \quad y=a.\sin t, \quad z=m.a.t, \tag{a}$$

встрѣчаетъ плоскость XOY по кривой:

$$\frac{X-x}{-y}=\frac{Y-y}{x}=-\frac{z}{z'}=-t$$

(такъ какъ по (a): $x'=-y$, $y'=x$, $x''=-x$, $y''=y$, $z'=ma$, $z''=0$).

Итакъ $X=x+ty$, $Y=y-tx$ или

$$X=a(\cos t+t\sin t), \quad Y=a(\sin t-t\cos t), \tag{b}$$

это *инволюта круга.*

Для $t=0$, $X=a$, $Y=0$**—эта точка есть точка возврата**, ибо $X'=at\cos t$ и $Y'=at\sin t$ обращаются въ нуль при $t=0$, а

$$\frac{X'Y''-Y'X''}{X'^3}=\frac{1}{X'}\left(\frac{Y'}{X'}\right)'=\frac{1}{at.\cos t(1+\cos^2 t)},$$

при $t=0$ обращается въ безконечность.

Замѣтимъ, что построеніе кривой (b) по точкамъ удобнѣе совершать по двумъ уравненіямъ, которыя слѣдуютъ изъ (b):

$$X^2+Y^2=a^2(1+t^2)$$

и

$$X\cos t+Y\sin t=a.$$

Уравненіе самой развертывающейся получается исключеніемъ t изъ уравненій

$$Y\cos t - X\sin t - \frac{1}{m}Z + at = 0$$

(уравненіе соприкасающейся плоскости винтовой линіи) и

$$Y\sin t + X\cos t - a = 0.$$

§ 13. Геометрическое мѣсто центровъ круговъ кривизны и центровъ соприкасающихся шаровъ.

Какъ и для плоской кривой, мы можемъ разсматривать кривую—геометрическое мѣсто центровъ круговъ кривизны,—которая въ параметрической формѣ изобразится уравненіями

$$\xi = x + lr, \quad \eta = y + mr, \quad \zeta = z + nr.$$

Но на ряду съ этимъ можно разсматривать и геометрическое мѣсто другой точки, связанной съ данною точкою кривой,— именно центръ соприкасающагося шара, соотвѣтствующаго этой точкѣ. Получаемъ другую кривую, связанную съ данной и въ параметрической формѣ изображаемую уравненіями

$$\xi = x + lr - \lambda\varrho r', \quad \eta = y + mr - \mu\varrho r', \quad \zeta = z + nr - \nu\varrho r'.$$

Двѣ кривыя совпадаютъ, если $\varrho r' = 0$, т. е. *для косыхъ круговъ*, когда $r' = 0$. (Случай $\varrho = 0$ приводитъ къ прямымъ линіямъ).

Примѣръ. Обыкновенная винтовая линія имѣетъ геометрическимъ мѣстомъ центровъ соприкасающихся шаровъ (и круговъ кривизны) кривую

$$\xi = -a\cos^2\varphi\cos\frac{s\,.\sin\varphi}{a}$$

$$\eta = -a\cos^2\varphi\sin\frac{s\,.\sin\varphi}{a}$$

$$\zeta = s\,.\cos\varphi$$

т. е. снова винтовую линію, только радіусъ цилиндра есть $a\cos^2\varphi$.

Для сферической кривой вторая линія сводится къ одной точкѣ. Но свойство эволюты плоской кривой,— что эволюта есть огибающая нормалей,— не принадлежитъ непосредственно ни той ни другой изъ вышеуказанныхъ кривыхъ.

Прежде всего, семейство кривыхъ въ пространствѣ, зависящее отъ одного параметра

$$F(x, y, z, a) = 0 \quad \Phi(x, y, z, a) = 0 \tag{a}$$

вообще не имѣетъ огибающей. Дѣйствительно, для этого нужно, чтобы пересѣкались двѣ безконечно близкія кривыя, соотвѣтствующія двумъ безконечно-близкимъ значеніямъ параметра, чего, вообще говоря, не будетъ. Пересѣкаться будутъ, вообще говоря, только нѣкоторыя кривыя семейства, соотвѣтствующія опредѣленнымъ значеніямъ параметра,— при которыхъ совмѣстны четыре уравненія:

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \quad F'_a = 0, \quad \Phi'_a = 0.$$

Вмѣсто кривой мы получимъ такимъ образомъ только извѣстное число точекъ. Кривая же линія, какъ огибающая, получится только въ томъ случаѣ, когда уравненія (a) удовлетворяютъ нѣкоторымъ добавочнымъ условіямъ.

Такъ если имѣемъ систему прямыхъ, зависящую отъ одного параметра, то для того чтобы эта система имѣла огибающую, послѣдовательныя прямыя (соотвѣтствующія безконечно-близкимъ значеніямъ параметра) должны пересѣкаться.

Этому условію удовлетворяютъ касательныя кривой двоякой кривизны, которыя и имѣютъ огибающею самую кривую. Но если возьмемъ систему главныхъ нормалей, на которыхъ лежатъ центры 1-ой кривизны, то эта система огибающей имѣть не будетъ,—ибо двѣ безконечно-близкія главныя нормали не пересѣкаются между собою.

Точно также не имѣетъ огибающей и всякая другая система нормалей, въ томъ числѣ и нормалей, содержащихъ центръ соприкасающагося шара. Мы можемъ скорѣе говорить объ огибающей нормальныхъ плоскостей.

Упражненіе: вывести уравненія кратчайшаго разстоянія двухъ безконечно-близкихъ главныхъ нормалей. Эта прямая называется *центральною осью.* Уравненія ея приводятся къ виду

$$0 = \frac{1}{r}[\alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z)] +$$

$$+ \frac{1}{\varrho}[\lambda(X-x) + \mu(Y-y) + \nu(Z-z)],$$

$$l(X-x) + m(Y-y) + n(Z-z) = \frac{r\varrho^2}{r^2 + \varrho^2}.$$

§ 14. Полярная поверхность и выпрямляющая поверхность.

Огибающая нормальныхъ плоскостей представляетъ другую развертывающуюся поверхность, связанную съ кривой двоякой кривизны. Здѣсь роль $F(x, y, z, a) = 0$ играетъ уравненіе нормальной плоскости:

$$\alpha(X-x)+\beta(Y-y)+\gamma(Z-z)=0.$$

Искомую огибающую получимъ, исключая s съ помощью уравненія:

$$\alpha'(X-x)+\beta'(Y-y)+\gamma'(Z-z)-(\alpha x'+\beta y'+\gamma z')\equiv$$
$$\equiv\frac{1}{r}[l(X-x)+m(Y-y)+n(Z-z)]-1=0.$$

Сравнивая (5) и (6) § 9, замѣчаемъ, что характеристиками для этой поверхности служатъ оси кривизны (полярныя прямыя); самая развертывающаяся называется *полярною поверхностью.* Чтобы получить характеристическую точку, надо взять производную по s; тогда, очевидно получимъ уравненіе (4′) § 9. Такимъ образомъ характеристическою точкою будетъ центръ соприкасающагося шара и, слѣдовательно, *ребромъ возврата полярной поверхности служитъ геометрическое мѣсто центровъ соприкасающихся шаровъ.*

Касательныя этой кривой суть характеристики полярной поверхности,—полярныя прямыя; онѣ параллельны бинормалямъ данной кривой. И такъ какъ нормальная плоскость является для геометрическаго мѣста центровъ соприкасающихся шаровъ соприкасающеюся плоскостью, то бинормалями для него являются прямыя, параллельныя касательнымъ данной кривой. Отсюда же слѣдуетъ, что главныя нормали для двухъ кривыхъ въ соотвѣтственныхъ точкахъ параллельны.

Третья развертывающаяся, связанная съ кривой двоякой кривизны, есть огибающая третьихъ граней основныхъ тетраэдровъ—выпрямляющихъ плоскостей.

Эта поверхность называется *выпрямляющею поверхностью* [1]).

Чтобы получить ея уравненіе дифференцируемъ уравненіе выпрямляющей плоскости

$$l(X-x)+m(Y-y)+n(Z-z)=0,$$

---

[1]) Названіе выпрямляющей поверхности происходитъ отъ слѣдующаго ея замѣчательнаго свойства: если развернуть ее на плоскость, то кривая, которая на ней лежитъ всѣми своими точками, обратится въ прямую линію. Этимъ же объясняется и названіе выпрямляющихъ плоскостей.

по параметру s; получимъ

$$l'(X-x)+m'(Y-y)+n'(Z-z)-(lx'+my'+nz')=0$$

или съ помощью формулъ Frenet-Serret и II, 1 § 6

$$0=-\frac{1}{r}[\alpha(X-x)+\beta(Y-y)+\gamma(Z-z)]-$$
$$-\frac{1}{\varrho}[\lambda(X-x)+\mu(Y-y)+\nu(Z-z)].$$

Уравненія эти показываютъ, что характеристическою линіей выпрямляющей поверхности является прямая, параллельная центральной оси. Это очевидно и геометрически: характеристика эта есть пересѣченіе двухъ безконечно-близкихъ выпрямляющихъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ двумъ соотвѣтственнымъ главнымъ нормалямъ; поэтому она и должна быть перпендикулярна къ той и другой, а слѣдовательно, параллельна ихъ кратчайшему разстоянію. Уравненія ребра возврата получимъ дифференцируя еще разъ по s второе уравненіе; имѣемъ

$$l''(X-x)+m''(Y-y)+n''(Z-z)-(l'x'+m'y'+n'z')=0$$

но

$$l''=(l')'=\left(-\frac{\alpha}{r}-\frac{\lambda}{\varrho}\right)'=\alpha\frac{r'}{r^2}-\frac{\alpha'}{r}+\lambda\frac{\varrho'}{\varrho^2}-\lambda'.\frac{1}{\varrho}=$$
$$=\alpha\frac{r'}{r^2}+\lambda\frac{\varrho'}{\varrho^2}-\frac{l}{r^2}-\frac{l}{\varrho^2}\text{ и т. д.}$$

$$l'x'+m'y'+n'z'=-\frac{1}{r}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\frac{1}{\varrho}(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma)=-\frac{1}{r}.$$

Такимъ образомъ съ помощью перваго это уравненіе можетъ быть замѣнено слѣдующимъ:

$$-\frac{1}{r}=\frac{r'}{r^2}[\alpha(X-x)+\beta(Y-y)+\gamma(Z-z)]+$$
$$+\frac{\varrho'}{\varrho^2}[\lambda(X-x)+\mu(Y-y)+\nu(Z-z)]$$

Искомая точка ребра возврата можетъ быть слѣдовательно опредѣлена, какъ пересѣченіе трехъ плоскостей

$$l(X-x)+m(Y-y)+n(Z-z)=0$$
$$\alpha(X-x)+\beta(Y-y)+\gamma(Z-z)=\frac{\varrho r}{r\varrho'-\varrho r'}$$
$$\lambda(X-x)+\mu(Y-y)+\nu(Z-z)=-\frac{\varrho^2}{r\varrho'-\varrho r'}.$$

Такимъ образомъ искомое ребро возврата выпрямляющей поверхности выражается въ параметрической формѣ слѣдующими уравненіями:

$$X = x + \frac{\alpha\varrho r - \lambda\varrho^2}{r\varrho' - \varrho r'},$$

$$Y = y + \frac{\beta\varrho r - \mu\varrho^2}{r\varrho' - \varrho r'},$$

$$Z = z + \frac{\gamma\varrho r - \nu\varrho^2}{r\varrho' - \varrho r'}.$$

§ 15. Особыя точки кривой въ пространствѣ.

До сихъ поръ предполагалось, что кривая имѣетъ въ своей точкѣ опредѣленную касательную и при томъ только одну. Такая точка—обыкновенная точка кривой. Но кромѣ того, какъ и плоская кривая, кривая двоякой кривизны можетъ имѣть такія точки, въ которыхъ къ ней можно провести болѣе, чѣмъ одну касательную. Такія точки называются *особенными*.

Если кривая задана уравненіями въ параметрической формѣ, то для особенной точки должны быть одновременно

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0. \tag{1}$$

Если кривая опредѣляется, какъ пересѣченіе двухъ поверхностей

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0,$$

то для особенной точки должны быть выполнены уравненія (ср. § 3)

$$F'_y . \Phi'_z - F'_z . \Phi'_y = 0, \; F'_z . \Phi'_x - F'_x . \Phi'_z = 0, \; F'_x . \Phi'_y - F'_y . \Phi'_x = 0. \tag{2}$$

Уравненія эти удовлетворяются: 1) если одновременно

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \quad F'_z = 0,$$

или

$$\Phi'_x = 0, \quad \Phi'_y = 0, \quad \Phi'_z = 0.$$

Въ этомъ случаѣ становится неопредѣленною касательная плоскость къ первой поверхности или ко второй поверхности (ср. далѣе § 16). 2) Если первыя производныя по x, y, z ни для $F(x, y, z)$, ни для $\Phi(x, y, z)$ нулю одновременно не равны, то должно быть

$$\frac{F'_x}{\Phi'_x} = \frac{F'_y}{\Phi'_y} = \frac{F'_z}{\Phi'_z}, \tag{3}$$

т. е. въ общей точкѣ двѣ поверхности F и Φ имѣютъ и общую касательную плоскость; точка будетъ точкою касанія двухъ поверхностей.

Чтобы опредѣлить угловые коэффиціенты касательной въ такой особенной точкѣ, представимъ себѣ, что вмѣсто x, y, z въ $F=0$ и $\Phi=0$ введены значенія ихъ въ функціи вспомогательнаго независимаго перемѣннаго t. Взявъ отъ полученныхъ такимъ образомъ тожествъ производныя по t, получимъ уравненія

$$F'_x.x'+F'_y.y'+F'_z.z'=0;\quad \Phi'_x.x'+\Phi'_y.y'+\Phi'_z.z'=0, \tag{4}$$

которыя для обыкновенной точки даютъ величины, пропорціональныя x', y', z'. Для особенной точки два уравненія сводятся къ одному, и мы должны обратиться ко вторымъ производнымъ:

$$\begin{gathered}F''_{x^2}.x'^2+2F''_{xy}.x'y'+F''_{y^2}.y'^2+2F''_{xz}.x'z'+2F''_{yz}.y'z'+F''_{z^2}.z'^2+\\+F'_x.x''+F'_y.y''+F'_z.z''=0.\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\Phi''_{x^2}.x'^2+2\Phi''_{xy}.x'y'+\Phi''_{y^2}.y'^2+2\Phi''_{xz}.x'z'+2\Phi''_{yz}.y'z'+\Phi''_{z^2}.z'^2+\\ \Phi'_x.x''+\Phi'_y.y''+\Phi'_z.z''=0.\end{gathered} \tag{5'}$$

Коэффиціенты при x'', y'', z'' по (3) пропорціональны. Умножая (5′) на множитель пропорціональности λ и вычитая изъ (5), получимъ,—если λ обозначаетъ общее значеніе трехъ отношеній (3):

$$\begin{gathered}(F''_{x^2}-\lambda\Phi''_{x^2})x'^2+(F''_{y^2}-\lambda\Phi''_{y^2})y'^2+(F''_{z^2}-\lambda\Phi''_{z^2})z'^2+\\+2(F''_{xy}-\lambda\Phi''_{xy})x'y'+2(F''_{xz}-\lambda\Phi''_{xz})x'z'+2(F''_{yz}-\lambda\Phi''_{yz})y'z'=0,\end{gathered} \tag{6}$$

которое вмѣстѣ съ однимъ изъ уравненій (4) опредѣлитъ двѣ системы значеній для $\frac{x'}{z'}$ и $\frac{y'}{z'}$, которымъ соотвѣтствуютъ двѣ касательныя. Уравненія этой пары касательныхъ будутъ:

1⁰) $$F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)+F'_z(Z-z)=0$$

равносильное въ этомъ случаѣ съ

$$\Phi'_x(X-x)+\Phi'_y(Y-y)+\Phi'_z(Z-z)=0$$

и уравненіе, получаемое замѣною въ (6) x', y', z' пропорціональными имъ величинами $(X-x)$, $(Y-y)$, $(Z-z)$,

2⁰) $$\begin{gathered}(F''_{x^2}-\lambda\Phi''_{x^2})(X-x)^2+(F''_{y^2}-\lambda\Phi''_{y^2})(Y-y)^2+(F''_{z^2}-\lambda\Phi''_{z^2})(Z-z)^2+\\+2(F''_{xy}-\lambda\Phi''_{xy})(X-x)(Y-y)+2(F''_{xz}-\lambda\Phi''_{xz})(X-x)(Z-z)+\\+2(F''_{yz}-\lambda\Phi''_{yz})(Y-y)(Z-z)=0.\end{gathered} \tag{7}$$

Смотря по тому, будетъ ли (6) совмѣстно съ (4) давать двѣ системы вещественныхъ значеній или двѣ мнимыхъ, или двѣ вещественныхъ совпадающихъ, имѣемъ узелъ, уединенную точку, или точку возврата.

Примѣръ: 1°) *узелъ*: кривая пересѣченія эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

съ шаромъ

$$x^2+y^2+z^2=b^2; \quad (a>b>c).$$

2°) *уединенная точка*: пересѣченіе гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

съ эллипсоидомъ

$$\frac{(x-a)^2}{4a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Какъ частный случай предыдущаго, является теорема: *касательная плоскость пересѣкаетъ поверхность по кривой, имѣющей точку прикосновенія особенною.*

Ее можно доказать независимо. Примемъ касательную плоскость за плоскость XOY и точку касанія за начало координатъ, тогда

$$F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)+F'_z(Z-z)=0,$$

при $x=0$, $y=0$, $z=0$ (когда $0=F(0,0,0)$) должно приводиться къ $Z=0$. Это доставляетъ:

$$F'_x(0,0,0)=0, \quad F'_y(0,0,0)=0 \tag{8}$$

и кромѣ того

$$F(0,0,0)=0. \tag{9}$$

Сѣченіе плоскостью XOY есть кривая

$$F(x,y,0)=0. \tag{10}$$

Ея особенныя точки опредѣляются условіями:

$$F'_x(x,y,0)=0, \quad F'_y(x,y,0)=0. \tag{11}$$

Эти условія выполняетъ въ силу (8) точка $(0,0,0)$, по (9) принадлежащая кривой (10).

III. Поверхности.

§ 16. Касательная плоскость и нормаль.

Мы уже видѣли (§ 3), что для поверхности

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

плоскость

$$F'_x(X-x) + F'_y(Y-y) + F'_z(Z-z) \tag{2}$$

есть геометрическое мѣсто касательныхъ ко всѣмъ кривымъ, которыя можно провести на поверхности черезъ точку $M = (x, y, z)$; она называется *касательною плоскостью*; M—ея точка прикосновенія.

Если уравненіе поверхности дано подъ видомъ

$$z = f(x, y), \tag{3}$$

то для краткости обозначаютъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

Тогда уравненіе касательной плоскости напишется

$$p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0. \tag{4}$$

Перпендикуляръ къ касательной плоскости, возставленный въ точкѣ прикосновенія, называется *нормалью* къ поверхности. Его уравненія:

$$\frac{X-x}{F'_x} = \frac{Y-y}{F'_y} = \frac{Z-z}{F'_z}, \tag{5}$$

если поверхность задана уравненіемъ (1), и

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}, \tag{6}$$

если поверхность задана уравненіемъ (3).

Косинусы угловъ нормали съ осями опредѣлятся для (5), какъ величины, пропорціональныя коэффиціентамъ (2), а ихъ абсолютныя значенія—изъ условія

$$\cos^2(n, \overline{OX}) + \cos^2(n, \overline{OY}) + \cos^2(n, \overline{OZ}) = 1,$$

такимъ образомъ найдемъ:

$$\cos(n, \overline{OX}) = \pm \frac{F'_x}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \quad \cos(n, \overline{OY}) = \pm \frac{F'_y}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},$$

$$\cos(n, \overline{OZ}) = \pm \frac{F'_z}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}};$$

для (6):

$$\cos(n, \overline{OX}) = \pm \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos(n, \overline{OY}) = \pm \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

$$\cos(n, \overline{OZ}) = \pm \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Двойной знакъ соотвѣтствуетъ двумъ направленіямъ нормали— *внутреннему* (направленному къ точкамъ, гдѣ $F(x, y, z) < 0$) и *внѣшнему* (направленному къ точкамъ, для которыхъ $F(x, y, z) > 0$).

§ 17. Особенныя точки поверхности.

Касательная въ точкѣ поверхности (1) § 16 только тогда опредѣленна, если три величины F'_x, F'_y, F'_z не равны одновременно нулю. Въ случаѣ, если для точки поверхности

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \quad F'_z = 0, \tag{1}$$

то уравненіе (2) § 16 обращается въ тожество: $0 = 0$. Тогда беремъ вторую производную [(5) § 15]. Съ помощью (1) оно принимаетъ по умноженіи на dt^2 видъ

$$F''_{x^2}dx^2 + F''_{y^2}dy^2 + F''_{z^2}dz^2 + 2F''_{xy}dxdy + 2F''_{xz}dxdz + \\ + 2F''_{yz}dydz = 0. \tag{2}$$

Но для прямой касательной къ поверхности dx, dy, dz пропорціональны $(X-x)$, $(Y-y)$, $(Z-z)$, слѣдовательно, (2) должно выполняться и при подобной замѣнѣ, т. е. должны имѣть:

$$F''_{x^2}(X-x)^2 + F''_{y^2}(Y-y)^2 + F''_{z^2}(Z-z)^2 + 2F''_{xy}(X-x)(Y-y) + \\ + 2F''_{xz}(X-x)(Z-z) + 2F''_{yz}(Y-y)(Z-z) = 0. \tag{3}$$

Это уравненіе выражаетъ коническую поверхность, или пару плоскостей, или двѣ совпадающія плоскости. Соотвѣтственно этому различаютъ точки *коническія*, *бипланарныя* и *унипланарныя*. Точка будетъ бипланарною, если равенъ нулю опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} F''_{x^2} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F''_{xy} & F''_{y^2} & F''_{yz} \\ F''_{xz} & F''_{yz} & F''_{z^2} \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Точка будетъ унипланарною, если (3) представляетъ полный квадратъ, т. е. если

$$\left.\begin{aligned} F''_{x^2}\cdot F''_{y^2} - (F''_{xy})^2 = 0\,, \\ F''_{x^2}\cdot F''_{yz} - F''_{xy}\cdot F''_{xz} = 0\,, \\ F''_{x^2}\cdot F''_{z^2} - (F''_{xz})^2 = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(при этомъ и опредѣлитель (4) обращается въ нуль). Условія (4) и (5), выражая что (3) распадается на два множителя или представляетъ полный квадратъ, получаются такъ, какъ это выводится въ аналитической геометріи на плоскости при изслѣдованіи общаго уравненія 2-ой степени.

Примѣры. 1) Если циссоида

$$(x+2a)^3 + xy^2 = 0$$

[за ось Y-овъ взята асимптота] вращается около оси X-овъ, то получаемая поверхность

$$(x+2a)^3 + x(y^2+z^2) = 0$$

въ точкѣ ($x = -2a$, $y = 0$, $z = 0$) имѣетъ касательный конусъ

$$Y^2 + Z^2 = 0\,,$$

приводящійся къ одной прямой—оси X-овъ.

Если же циссоида вращается около асимптоты, то образуетъ поверхность

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2+12a^2) - 4a^2\{3(x^2+y^2)+4a^2\}^2 = 0\,,$$

для которой каждая точка круга

$$z = 0\,,\quad x^2+y^2 = 4a^2\,,$$

будетъ унипланарною точкою.

2) Вращеніемъ строфоиды

$$(x^2+y^2)\,x = a\,(x^2-y^2)$$

около оси X-овъ получаемъ поверхность

$$(x^2+y^2+z^2)x-a(x^2-y^2-z^2)=0,$$

имѣющую въ началѣ координатъ касательный конусъ

$$X^2-Y^2-Z^2=0,$$

это точка коническая.

Если же строфоида вращается около асимптоты, то поверхность

$$(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)-a^2(x^2+y^2-z^2)^2=0$$

въ каждой точкѣ окружности $x^2+y^2=a^2$ имѣетъ бипланарную точку.

Въ этихъ примѣрахъ мы встрѣтились съ новою еще особенностью поверхности—*двойными* или *особенными линіями*, каждая точка которыхъ есть особенная точка поверхности.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ разсматривать обыкновенныя точки поверхностей.

§ 18. Главныя касательныя. Асимптотическія линіи.

Пусть поверхность задана уравненіемъ:

$$z=f(x,\ y) \tag{1}$$

Точка ея, безконечно-близкая къ (x, y, z), пусть имѣетъ координаты

$$x+dx,\quad y+dy,\quad z+\Delta z,$$

гдѣ изъ (1)

$$\Delta z=f(x+dx,\ y+dy)-f(x,\ y)=$$
$$=pdx+qdy+\frac{1}{2}(rdx^2+2sdx\,dy+tdy^2)+$$
$$+\frac{1}{2\,.\,3}(kdx^3+3ldx^2dy+3mdx\,dy^2+ndy^3)+\ldots$$

если для краткости вторыя производныя z по x и по y означимъ r, s, t, а третьи производныя черезъ k, l, m, n.

Опустимъ изъ нея перпендикуляръ на касательную плоскость въ точкѣ (x, y, z)

$$(Z-z)-p(X-x)-q(Y-y)=0.$$

Онъ имѣетъ своимъ выраженіемъ

$$\frac{\Delta z-pdx-qdy}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{rdx^2+2sdx\,dy+tdy^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\ldots \tag{2}$$

Итакъ: перпендикуляръ изъ точки поверхности, сосѣдней съ точкою (x, y, z), на касательную въ этой точкѣ плоскость есть безконечно малая 2-го порядка относительно дифференціаловъ координатъ.

Но если dx, dy таковы, что

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0\,, \tag{3}$$

то этотъ перпендикуляръ будетъ безконечно малая *3-го порядка.*

Уравненіе (3) подчиняетъ каждой точкѣ плоскости XOY два направленія, въ пространствѣ—двѣ плоскости, перпендикулярныя къ XOY, которыя пересѣкаютъ касательную плоскость по двумъ прямымъ, имѣющимъ съ поверхностью соприкосновеніе 2-го порядка. Эти прямыя называются *главными касательными* поверхности.

Уравненіе (3) есть дифференціальное уравненіе, которое, будучи проинтегрировано, доставитъ два соотношенія вида $\Phi(x, y) = c$, которыя опредѣлятъ въ пространствѣ систему цилиндровъ, вырѣзающихъ на поверхности кривыя, въ каждой своей точкѣ имѣющія касательными соотвѣтственныя главныя касательныя кривой. Эти кривыя называются *кривыми главныхъ касательныхъ или асимптотическими линіями.*

Такъ, для гиперболическаго параболоида

$$z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

$$r = 1\,, \quad s = 0\,, \quad t = -1$$

и уравненіе (3) будетъ таково:

$$dx^2 - dy^2 = 0\,,$$

оно распадается на два:

$$dx - dy = 0 \quad \text{и} \quad dx + dy = 0\,,$$

откуда

$$y - x = c\,, \quad y + x = c',$$

плоскости, пересѣкающія поверхность по прямолинейнымъ образующимъ:

$$y - x = c\,, \quad z = \frac{c}{2}(x + y)$$

и

$$y + x = c', \quad z = \frac{c'}{2}(x - y).$$

Примѣнимъ критеріи прикосновенія n-го порядка линіи съ поверхностью къ случаю соприкосновенія прямой, проходящей черезъ точку (x, y, z) поверхности

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

съ этою послѣдней.

Пусть уравненія прямой

$$\frac{X-x}{\lambda}=\frac{Y-y}{\mu}=\frac{Z-z}{\nu}=\sigma\,, \tag{4}$$

такъ что

$$X=x+\lambda\sigma\,,\quad Y=y+\mu\sigma\,,\quad Z=z+\nu\sigma. \tag{4'}$$

Подставляя въ (1), должны имѣть разность

$$Z-f(X\,,\ Y)$$

безконечно малою 2-го порядка для соприкосновенія 1-го порядка.

Но

$$Z-f(X\,,\ Y)\equiv z+\nu\sigma-f(x+\lambda\sigma\,,\ y+\mu\sigma)\equiv$$
$$\equiv\sigma(\nu-p\lambda-q\mu)-\frac{\sigma^2}{2}\{r\lambda^2+2s\lambda\mu+t\mu^2\}-\ldots$$

(ибо $z-f(x\,,\ y)=0$ въ силу (1)).

Для соприкосновенія 1-го порядка прямой (4) съ поверхностью (1) должно быть, слѣдов.,

$$\nu-\lambda p-\mu q=0\,,$$

или

$$\lambda p+\mu q-\nu=0\,, \tag{5}$$

т. е. прямая должна быть параллельна касательной плоскости:

$$Z-z-p(X-x)-q(Y-y)=0.$$

Она проходитъ притомъ черезъ точку прикосновенія, слѣдовательно вся лежитъ въ касательной плоскости.

Прикосновеніе будетъ 2-го порядка, если $\lambda\,,\ \mu\,,\ \nu$, выполняютъ сверхъ (5) еще условіе

$$r\lambda^2+2s\mu\lambda+t\mu^2=0. \tag{6}$$

Это будетъ главная касательная. Въ каждой точкѣ ихъ двѣ, и при томъ вещественныя и различныя при $rt-s^2<0$, мнимыя при $rt-s^2>0$ и совпадающія при $rt-s^2=0$.

Задача разысканія кривыхъ, лежащихъ на поверхности (1) и имѣющихъ въ каждой точкѣ своею касательною одну изъ главныхъ касательныхъ, приводитъ къ уравненіямъ:

$$\frac{dx}{\lambda}=\frac{dy}{\mu}=\frac{dz}{\nu}\,,$$

гдѣ $\lambda\,,\ \mu\,,\ \nu$ опредѣлены уравненіемъ (6), т. е. отъ (6) къ дифференціальному уравненію (3) *асимптотическихъ линій поверхности.*

Къ этимъ же кривымъ придемъ, разыскивая тѣ лежащія на поверхности кривыя, для которыхъ соприкасающеюся плоскостью въ каждой точкѣ является соотвѣтствующая касательная плоскость, и коихъ бинормаль, слѣдовательно, совпадаетъ съ нормалью поверхности.

Послѣднее условіе даетъ:

$$p\alpha + q\beta - \gamma = 0, \quad pl + qm - n = 0,$$

или

$$px' + qy' - z' = 0, \quad px'' + qy' - z'' = 0.$$

Дифференцируя первое по дугѣ (x, y, z по уравненію кривой линіи суть функціи дуги), имѣемъ:

$$px'' + qy'' - z'' + p'x' + q'y' = 0,$$

что въ силу второго сводится къ

$$p'x' + q'y' = 0.$$

Но

$$p' = rx' + sy', \quad q' = sx' + ty'.$$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 = 0,$$

что по умноженіи на квадратъ дифференціала дуги и даетъ уравненіе (3).

Полученное въ началѣ этого параграфа выраженіе для длины перпендикуляра изъ точки поверхности на касательную плоскость понадобится намъ и въ дальнѣйшемъ.

Въ данномъ вопросѣ мы могли бы обойтись безъ него, если бы примѣнили для нахожденія прямой, имѣющей возможно высшій порядокъ прикосновенія съ поверхностью

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

общій пріемъ. Пусть $M(x, y, z)$ — точка поверхности, и

$$\frac{X - x}{L} = \frac{Y - y}{M} = \frac{Z - z}{N}, \tag{7}$$

проходящая черезъ нее прямая; означая общее значеніе трехъ отношеній черезъ τ, напишемъ уравненія прямой въ параметрической формѣ:

$$X = x + L\tau, \quad Y = y + M\tau, \quad Z = z + N\tau.$$

Для соприкосновенія n-го порядка функція

$$\Phi(\tau) \equiv z + N\tau - f(x + L\tau\,, \quad y + M\tau)$$

и ея производныя до n-го порядка включительно должны уничтожаться при $\tau = 0$. Отсюда такъ какъ 1-ое условіе $\Phi(0) = 0$ уже выполнено, получаемъ

$$N - L\frac{\partial f}{\partial x} - M\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad N - pL - qM = 0. \tag{8}$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}L^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}LM - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}M^2 = 0 \quad \text{или} \quad rL^2 + 2sLM + tM^2 = 0 \tag{9}$$

$$-\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}L^3 - 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}L^2M - 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}LM^2 - \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}M^3 = 0$$

или

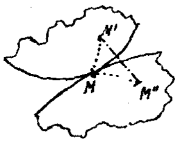
$$kL^3 + 3lL^2M + 3m\,.\,LM^2 + nM^3 = 0. \tag{10}$$

Если выполнено (8), прямая (7) имѣетъ съ поверхностью (1) прикосновеніе 1-го порядка; условіе (8) выражаетъ, что она перпендикулярна къ нормали; такъ какъ она, кромѣ того, уже проходитъ черезъ точку поверхности, то она лежитъ въ касательной плоскости. *Прямая, проходящая черезъ точку поверхности и лежащая въ касательной плоскости имѣетъ съ поверхностью прикосновеніе перваго порядка.* Но если L, M, N удовлетворяютъ и уравненію (9), то прямая имѣетъ прикосновеніе 2-го порядка: въ касательной плоскости черезъ точку прикосновенія проходятъ двѣ прямыя, имѣющія *съ поверхностью прикосновеніе 2-го порядка. Это главныя касательныя.* Уравненія (8), (9) вмѣстѣ съ уравненіемъ $L^2 + M^2 + N^2 = 1$ вполнѣ опредѣляютъ L, M, N. Прикосновенія болѣе высокаго порядка не имѣетъ ни одна прямая, проведенная черезъ произвольно взятую точку поверхности. Но подобно тому, какъ у плоскихъ кривыхъ существуютъ точки (точки перегиба), въ которыхъ касательная имѣетъ съ поверхностью прикосновеніе не 1-го, а 2-го порядка, такъ и съ поверхностью, если кромѣ (9) выполняется и (10), прямая (7) имѣетъ прикосновеніе 3-го порядка. Уравненіе (9) и (10), однородныя относительно L и M, приводятъ къ соотношенію между x и y, которое въ плоскости XOY опредѣляетъ кривую, а въ пространствѣ цилиндръ, вырѣзающій на поверхности (1) кривую, черезъ каждую точку которой можно провести прямую, имѣющую съ поверхностью (1) прикосновенія 3-го порядка.

Если наконецъ это уравненіе удовлетворяется всѣми точками поверхности, то послѣднее свойство принадлежитъ всѣмъ имъ. Такія поверхности называются *линейчатыми*. Исключеніе L, M изъ (9) и (10) даетъ соотношеніе между частными производными 2-го и 3-го порядка отъ z по x и по y, которому удовлетворяютъ подобныя поверхности (см. дал. § 36).

§ 19. Соприкосновеніе поверхностей.

Опредѣленіе: *Двѣ поверхности имѣютъ въ общей точкѣ M прикосновеніе порядка n, если взявъ на одной изъ нихъ точку M' и проведя прямую, не параллельную касательной плоскости ко второй, до пересѣченія со второю поверхностью въ M'', получимъ разстояніе $M'M''$ — безконечно-малую $(n+1)$-го порядка относительно MM'.*



Черт. 44.

Пусть $F(x, y, z)=0$ уравненіе 2-ой поверхности, а уравненія 1-ой:

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v), \quad z=\chi(u, v).$$

Обозначимъ координаты точекъ:

$$M: \quad x_0=\varphi(u_0, v_0), \quad y_0=\psi(u_0, v_0), \quad z_0=\chi(u_0, v_0),$$

$$M': \quad x_1=\varphi(u_1, v_1), \quad y_1=\psi(u_1, v_1), \quad z_1=\chi(u_1, v_1).$$

Разстояніе $MM'=$

$$=\sqrt{[\varphi(u_1,v_1)-\varphi(u_0,v_0)]^2+[\psi(u_1,v_1)-\psi(u_0,v_0)]^2+[\chi(u_1,v_1)-\chi(u_0,v_0)]^2}$$

$$=\sqrt{E(u_1-u_0)^2+2F(u_1-u_0)(v_1-v_0)+G(v_1-v_0)^2+\varepsilon},$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} E&=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\\ F&=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right),\\ G&=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(въ производныхъ должно подставить $u=u_0$ и $v=v_0$) а ε — остальные члены разложеній, содержащіе (u_1-u_0) и (v_1-v_0) въ третьей и высшихъ степеняхъ. Такимъ образомъ главная часть MM' есть

$$\sqrt{E(u_1-u_0)^2+2F(u_1-u_0)(v_1-v_0)+G(v_1-v_0)^2}.$$

Съ помощью извѣстнаго тожества Эйлера можно представить

$$EF-G^2 \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2.$$

Стало быть подъ корнемъ стоитъ выраженіе, не разлагающееся на вещественные линейные множители и потому не уничтожающееся ни при какихъ вещественныхъ значеніяхъ отношенія $\frac{v_1-v_0}{u_1-u_0}$.

Поэтому MM' одного порядка съ разностями (u_1-u_0) и (v_1-v_0).

Если означимъ черезъ d разстояніе $M'M''$ и λ, μ, ν—косинусы угловъ $M'M''$ съ осями, то координаты M'':

$$x=x_1+\lambda d,\quad y=y_1+\mu d,\quad z=z_1+\nu d.$$

Подстановка въ $F=0$ даетъ:

$$F(x,\,y,\,z)\equiv F(x_1,\,y_1,\,z_1)+d\,.\,(\lambda F'_{x_1}+\mu F'_{y_1}+\nu F'_{z_1})+d^2.R,$$

гдѣ $d^2.R$—сумма членовъ, содержащихъ d во 2-ой и высшихъ степеняхъ.

Если главная часть

$$\lambda F'_{x_1}+\mu F'_{y_1}+\nu F'_{z_1}\neq 0,$$

то

$$F(x_1,\,y_1,\,z_1)\text{ и } d$$

должны быть одного порядка малости. Но главная часть

$$(\lambda F'_{x_1}+\mu F'_{y_1}+\nu F'_{z_1})=\lambda F'_{x_0}+\mu F'_{y_0}+\nu F'_{z_0};$$

а это выраженіе пропорціонально косинусу угла нормали къ $F=0$ въ M съ $M'M''$ и потому не равно нулю, такъ какъ прямая $M'M''$ не параллельна касательной плоскости въ M къ $F=0$).

Поэтому $F(x_1,\,y_1,\,z_1)$, гдѣ вмѣсто $x_1,\,y_1,\,z_1$ должны быть подставлены ихъ выраженія въ функціи (u_1+v_1), разложенныя по степенямъ (u_1-u_0), (v_1-v_0), должна быть порядка $(n+1)$-го относительно этихъ разностей.

Если, въ частности, обѣ поверхности заданы уравненіями:

$$z=f(x,\,y),\quad z=F(x,\,y),$$

то

$$u=x,\quad v=y$$

и условіе прикосновенія n-го порядка будетъ: *частныя производныя до* *порядка n включительно должны имѣть въ общей точкѣ одинаковыя значенія.* Это даетъ для соприкосновенія n-го порядка

$$1+2+\ldots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}$$

условій.

Здѣсь также можно задаться вопросомъ о нахожденіи поверхностей опредѣленнаго типа, имѣющихъ наибольшее возможное прикосновеніе съ данной поверхностью въ нѣкоторой данной ея точкѣ.

Уравненіе плоскости содержитъ три произвольныхъ коэффиціента и, слѣдовательно, плоскость можетъ имѣть съ поверхностью прикосновеніе 1-го порядка: первое условіе—проходить черезъ точку (x, y, z) поверхности—пусть уже наложили; остается въ уравненіи

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

такъ опредѣлить A, B, C, чтобы были одинаковы частныя производныя z по x и по y для этой плоскости и для поверхности; для этого должно быть:

$$-\frac{A}{C}=p, \quad -\frac{B}{C}=q,$$

такъ что получаемъ по раздѣленіи на C:

$$-p(X-x)-q(Y-y)+(Z-z)=0,$$

это уравненіе касательной плоскости; такимъ образомъ *касательная плоскость имѣетъ съ поверхностью соприкосновеніе 1-го порядка.*

§ 20. Соприкасающійся параболоидъ.

Уравненіе шара содержитъ четыре коэффиціента, а для соприкосновенія 2-го порядка требуется шесть условій; поэтому для полученія поверхности, имѣющей соприкосновеніе 2-го порядка надо взять другую поверхность, имѣющую шесть произвольныхъ коэффиціентовъ. Такою поверхностью является параболоидъ, уравненіе котораго

$$Z=A+BX+CY+\frac{1}{2}(DX^2+2EXY+FY^2),$$

содержитъ какъ разъ шесть коэффиціентовъ.

Прежде всего введемъ условіе, при которомъ онъ проходитъ черезъ точку (x, y, z) поверхности, для чего уравненіе его возьмемъ подъ видомъ

$$Z-z=B(X-x)+C(Y-y)+\frac{1}{2}[D(X-x)^2+2E(X-x)(Y-y)+ \\ +G(Y-y)^2];$$

условіе равенства первыхъ и вторыхъ производныхъ для (x, y, z) даетъ:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p=B, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=q=C, \quad D=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r, \quad E=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=s, \quad G=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t,$$

такъ что уравненіе искомаго параболоида принимаетъ видъ

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)+\frac{1}{2}[r(X-x)^2+ \\ +2s(X-x)(Y-y)+t(Y-y)^2]. \tag{3}$$

Если начало координатъ помѣстить въ точку поверхности и за плоскость XOY взять касательную въ этой точкѣ плоскость, то (3) упростится и приметъ видъ:

$$Z=\frac{1}{2}(r_0 X^2+2s_0 XY+t_0 Y^2),$$

гдѣ $x_0=y_0=z_0=0$ и также $p_0=q_0=0$.

Замѣтимъ, что уравненіе (3) получится, если въ уравненіи поверхности

$$Z=f(X, Y)$$

разложимъ f по степенямъ $(X-x)$, $(Y-y)$ и отбросимъ члены 3-го и высшихъ порядковъ относительно этихъ разностей.

§ 21. Видъ поверхности вблизи обыкновенной ея точки. Индикатриса Дюпена. Классификація обыкновенныхъ точекъ поверхности.

Пусть M обыкновенная точка поверхности

$$z=f(x, y); \tag{1}$$

чтобы опредѣлить видъ поверхности въ этой точкѣ, примемъ ее за начало координатъ, а плоскость, касательную къ поверхности въ этй точкѣ, за плоскость xy-овъ. Тогда, если f можетъ быть разложена по степенямъ x и y, получимъ

$$z=\frac{1}{2}(r_0x^2+2s_0xy+t_0y^2)+\frac{1}{2}(k_0x^3+3l_0x^2y+3m_0xy^2+n_0y^3)+\ldots, \tag{2}$$

потому что при такомъ выборѣ осей

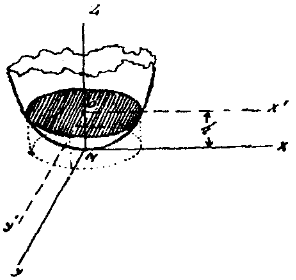
$$f(0,\ 0) = 0\,,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 0\,,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = 0\,.$$

Пересѣчемъ поверхность плоскостью $z = h$ (h—малая величина).

Кривая сѣченія проэктируется на параллельную ея плоскости плоскость XOY по кривой

$$h = \frac{1}{2}(r_0 x^3 + 2 s_0 xy + t_0 y^2) + \Sigma_3\,,$$

гдѣ Σ_3— совокупность членовъ 3-го и высшихъ порядковъ относительно x и y. Для малыхъ значеній x и y, т. е. для точекъ вблизи начала координатъ, можно пренебречь этими членами, и кривая сѣченія вблизи (0, 0, 0) представится приближенно кривою



Черт. 45.

$$2h = r_0 x^2 + 2 s_0 xy + l_0 y^2 \tag{3}$$

Эта кривая представляетъ собою въ тоже время пересѣченіе плоскости $z = h$ съ соприкасающимся параболоидомъ; она подобна кривой

$$1 = r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2\,, \tag{4}$$

которую называютъ *индикатрисою Dupin'a*.

Эта кривая будетъ эллипсомъ при $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ (вещественнымъ при r_0, t_0 положительныхъ), гиперболою при $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$ и парою параллельныхъ прямыхъ при $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$.

Въ первомъ случаѣ (3) суть эллипсы, вещественные при знакѣ h, одинаковомъ со знакомъ r_0, t_0, мнимые при противоположномъ. Поверхность лежитъ (вблизи точки касанія) по одну сторону касательной плоскости. Соприкасающійся параболоидъ будетъ эллиптическимъ. Самую точку называютъ *эллиптическою точкою поверхности*.

Во второмъ случаѣ (3) суть гиперболы, вещественныя при всякихъ вещественныхъ значеніяхъ h, но расположенныя, смотря по знаку h, въ той или другой изъ двухъ паръ вертикальныхъ угловъ, образуемыхъ прямыми

$$r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2 = 0\,, \tag{5}$$

которыя служатъ асимптотами для всѣхъ кривыхъ (3) и (4) и являются пересѣченіемъ соприкасающагося параболоида касательной плоскостью (т. е. XOY). (Для эллиптической точки асимптоты индикатрисы мнимыя).

Поверхность лежитъ и выше и ниже касательной плоскости, пересѣкая ее. Параболоидъ соприкасающійся будетъ *гиперболическимъ*. Точка называется *гиперболическою.*

Наконецъ при $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ (4) изображаетъ пару параллельныхъ прямыхъ, (3)—также, но вещественныхъ или мнимыхъ—смотря по знаку h.

Соприкасающійся параболоидъ обращается въ параболическій цилиндръ. Асимптоты индикатрисы сливаются въ одну двойную прямую, ибо

$$r_0 x^2 + 2s_0 xy + t_0 y^2$$

есть при этомъ полный квадратъ. Точку называютъ *параболической.*

Примѣръ 1. Торъ (кольцеобразное тѣло, образуемое вращеніемъ круга опредѣленнаго радіуса около оси, лежащей въ его плоскости, но не проходящей черезъ его центръ)

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 = 4b^2 (x^2 + y^2)$$

имѣетъ точки эллиптическія въ наружной части.

Примѣръ 2. Вращеніе цѣпной линіи:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

около прямой, перпендикулярной къ ея оси симметріи и удаленной на a отъ ея вершины, даетъ поверхность, называемую *катеноидомъ*:

$$y^2 + z^2 = \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2.$$

Перенося начало въ точку $x = a$, $y = z = 0$, имѣемъ:

$$y^2 + z^2 = \frac{a^2}{h}\left(e^{\frac{x-a}{a}} + e^{-\frac{x-a}{a}}\right)^2.$$

Точки поверхности суть гиперболическія.

Примѣръ 3. *Поверхность*

$$a^2 z = \left(x - \frac{y^2}{2b}\right)^3,$$

образуемая перемѣщеніемъ кубической параболы параллельно ей самой, такъ что ея точка перегиба описываетъ параболу 2-го порядка въ плоскости XOY, перпендикулярной къ плоскости кубической параболы, имѣетъ въ каждой точкѣ плоскости XOY параболическую точку.

Установимъ теперь *связь асимптотическихъ линій съ индикатрисою.*

Выборъ осей OX и OY пока не сдѣланъ. Если за оси координатъ примемъ оси индикатрисы, то (4) приметъ видъ:

$$1 = r_1 x^2 + t_1 y^2 ,$$

а (3):

$$2h = r_1 x^2 + t_1 y^2$$

(при чемъ $r_1 + t_1 = r_0 + t_0$, $r_1 t_1 = r_0 t_0 - s_0^2$).

Уголъ поворота α опредѣлится по формулѣ

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2s_0}{r_0 - t_0} ; \tag{6}$$

получаемъ два взаимно перпендикулярныхъ направленія — направленія осей индикатрисы.

Асимпоты индикатрисы (5) суть въ тоже время направленія главныхъ касательныхъ. Дѣйствительно, эти послѣднія лежатъ въ касательной плоскости и опредѣляются условіемъ:

$$rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 = 0 .$$

Мы приняли касательную плоскость за плоскость XOY, слѣдовательно, если β уголъ главной касательной съ осью OX, то

$$\cos\beta = x' , \quad \sin\beta = y' ;$$

отсюда получаемъ

$$r_0 \cos^2\beta + 2s_0 \cos\beta \sin\beta + t_0 \sin^2\beta = 0 ,$$

что совпадаетъ съ уравненіемъ (6), ибо точка

$$x = \cos\beta , \quad y = \sin\beta ,$$

должна лежать на одной изъ асимптотъ (5).

Этимъ объясняется введенное уже нами названіе асимптотическихъ линій,—онѣ являются огибающими асимптотъ индикатрисъ, соотвѣтствующихъ различныхъ точкамъ поверхности.

§ 22. Линіи кривизны. Шаровыя точки.

Направленія осей индикатрисы дѣлятъ пополамъ углы между асимптотами ея. Мы получаемъ, такимъ образомъ, двѣ взаимно перпендикулярныхъ касательныхъ въ каждой точкѣ поверхности.

Огибающія этихъ касательныхъ называются *линіями кривизны*,— мы встрѣтимся съ ними далѣе.

Къ этимъ линіямъ приходимъ также, поставивъ задачу—опредѣлить тѣ линіи на поверхности, въ безконечно-близкихъ точкахъ которыхъ нормали къ поверхности пересѣкаются.

Вообще говоря, въ двухъ безконечно-близкихъ точкахъ (x, y, z) и $(x+dx, y+dy, z+dz)$ поверхности $z=f(x, y)$ нормали

$$\frac{Z-z}{-1}=\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q} \tag{6}$$

и

$$\frac{Z-z-dz}{-1}=\frac{X-x-dx}{p+dp}=\frac{Y-y-dy}{q+dq} \tag{6'}$$

не пересѣкаются. Чтобы онѣ пересѣкались, нужно, чтобы эти четыре уравненія удовлетворялись одними и тѣми же значеніями X, Y, Z.

Означая σ общее значеніе трехъ первыхъ отношеній и подставляя во вторыя, получимъ

$$\sigma+dz=\frac{p\sigma-dx}{p+dp}=\frac{q\sigma-dy}{q+dq},$$

или, уравнивая первое со вторымъ и съ третьимъ:

$$\left.\begin{aligned}\sigma\, dp+dz\,(p+dp)+dx=0\,,\\ \sigma\, dq+dz\,(q+dq)+dy=0\,.\end{aligned}\right\}$$

Исключая отсюда σ, получимъ, наконецъ:

$$dz\,(pdq-qdp)+(dqdx-dpdy)=0\,.$$

Замѣняя здѣсь

$$dz=pdx+qdy\,,\quad dp=rdx+sdy\,,\quad dq=sdx+tdy\,,$$

найдемъ, собирая члены съ dx^2, $dxdy$ и dy^2:

$$\begin{aligned}dx^2\,[s(1+p^2)-rpq]+dx\,dy\,[t\,(1+p^2)-r\,(1+q^2)]+\\ +dy^2\,[p\,qt-s\,(1+q^2)]=0\,.\end{aligned} \tag{7}$$

По уравненію поверхности p, q, r, s и t суть функціи x и y. Это есть, стало быть, нѣкоторое дифференціальное уравненіе, проинтегрировавъ которое мы найдемъ два уравненія вида $\Phi(x, y) = C$,—соотвѣтственно двумъ корнямъ $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, которые оно даетъ. Каждое изъ этихъ уравненій изображаетъ въ пространствѣ семейство цилиндровъ, вырѣзающихъ на поверхности ея линіи кривизны. Направленія ихъ въ выбранной выше системѣ координатъ для точки $(0, 0, 0)$ опредѣлятся при замѣнѣ въ (7):

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 0$$

изъ уравненія:

$$s_0\, dx^2 + (t_0 - r_0)\, dxdy - s_0\, dy^2 = 0,$$

откуда

$$\frac{2dydx}{dx^2 - dy^2} = \frac{2s_0}{r_0 - t_0},$$

т. е. означая

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha,$$

получимъ

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2s_0}{r_0 - t_0},$$

т. о. *касательныя къ линіямъ кривизны,* проходящимъ черезъ данную точку поверхности, *совпадаютъ съ осями индикатрисы,* соотвѣтствующей этой точкѣ.

Черезъ каждую точку поверхности проходятъ такимъ образомъ по двѣ пары линій: 1) двѣ асимптотическія линіи, касательныя къ которымъ суть соотвѣтствующія этой точкѣ главныя касательныя или асимптоты индикатрисы; эти линіи пересѣкаются, вообще говоря, не подъ прямымъ угломъ; 2) двѣ линіи кривизны, взаимно перпендикулярныя, касательныя къ которымъ служатъ осями индикатрисы и биссектрисами угловъ между асимптотами ея.

Существуютъ, однако, на поверхности точки, въ которыхъ направленія линій кривизны неопредѣленны. Это суть тѣ точки, для которыхъ обращаются въ нуль коэффиціенты при

$$dx^2, \quad dxdy \quad \text{и} \quad dy^2$$

въ (7) въ отдѣльности, — то есть

$$s(1+p^2) - rpq = 0, \quad t(1+p^2) - r(1+q^2) = 0, \quad pqt - s(1+q^2) = 0.$$

Три условія эти сводятся къ *двумъ*:

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}, \tag{8}$$

такимъ образомъ *на каждой поверхности существуютъ* (дѣйствительныя или мнимыя) *точки, въ которыхъ направленія линій кривизны неопредѣленны*. Такія точки называются *умбиликами* или *шаровыми точками*, или *точками округленія* [1]).

Въ шаровыхъ точкахъ шаръ имѣетъ съ поверхностью *соприкосновеніе 2-го порядка*.

Дѣйствительно, чтобы шаръ

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+(Z-\zeta)^2-r^2=0,$$

имѣлъ съ поверхностью

$$z=f(x,\ y)$$

соприкосновеніе 2-го порядка, должны быть выполнены шесть условій:

$$\begin{gathered}(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-r^2=0,\\ (x-\xi)+p(z-\zeta)=0,\\ y-\eta+q(z-\zeta)=0,\\ 1+p^2+r(z-\zeta)=0,\\ pq+s(z-\zeta)=0,\\ 1+q^2+t(z-\zeta)=0,\end{gathered}$$

вообще говоря, несовмѣстимыхъ. Но для шаровой точки въ силу соотношеній (8) три послѣднія уравненія сводятся къ одному:

$$z-\zeta=-\frac{1+p^2}{r}=-\frac{pq}{s}=-\frac{1+q^2}{t}=\tau.$$

Три первыя уравненія даютъ теперь η, ξ, r:

$$\begin{gathered}x-\xi=-p\tau,\quad y-\eta=-q\tau,\\ r^2=(p^2+q^2+1)\tau^2,\end{gathered}$$

и уравненіе соприкасающагося шара для шаровой точки будетъ:

$$(X-x-p\tau)^2+(Y-y-q\tau)^2+(Z-\zeta+\tau)^2=(p^2+q^2+1)\tau^2$$

или

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2-2\tau\,[p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)]=0.$$

---

[1]) По французски: ombilics; по нѣмецки: Nabelpuncte.

По уравненію поверхности p, q, r, s и t суть функціи x и y. Это есть, стало быть, нѣкоторое дифференціальное уравненіе, проинтегрировавъ которое мы найдемъ два уравненія вида $\Phi(x, y) = C$,—соотвѣтственно двумъ корнямъ $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, которые оно даетъ. Каждое изъ этихъ уравненій изображаетъ въ пространствѣ семейство цилиндровъ, вырѣзающихъ на поверхности ея линіи кривизны. Направленія ихъ въ выбранной выше системѣ координатъ для точки $(0, 0, 0)$ опредѣлятся при замѣнѣ въ (7):

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 0$$

изъ уравненія:

$$s_0\, dx^2 + (t_0 - r_0)\, dxdy - s_0\, dy^2 = 0,$$

откуда

$$\frac{2dydx}{dx^2 - dy^2} = \frac{2s_0}{r_0 - t_0},$$

т. е. означая

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha,$$

получимъ

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2s_0}{r_0 - t_0},$$

т. о. *касательныя къ линіямъ кривизны,* проходящимъ черезъ данную точку поверхности, *совпадаютъ съ осями индикатрисы,* соотвѣтствующей этой точкѣ.

Черезъ каждую точку поверхности проходятъ такимъ образомъ по двѣ пары линій: 1) двѣ асимптотическія линіи, касательныя къ которымъ суть соотвѣтствующія этой точкѣ главныя касательныя или асимптоты индикатрисы; эти линіи пересѣкаются, вообще говоря, не подъ прямымъ угломъ; 2) двѣ линіи кривизны, взаимно перпендикулярныя, касательныя къ которымъ служатъ осями индикатрисы и биссектрисами угловъ между асимптотами ея.

Существуютъ, однако, на поверхности точки, въ которыхъ направленія линій кривизны неопредѣленны. Это суть тѣ точки, для которыхъ обращаются въ нуль коэффиціенты при

$$dx^2, \quad dxdy \quad \text{и} \quad dy^2$$

въ (7) въ отдѣльности,— то есть

$$s(1+p^2) - rpq = 0, \quad t(1+p^2) - r(1+q^2) = 0, \quad pqt - s(1+q^2) = 0.$$

Три условія эти сводятся къ *двумъ:*

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}, \tag{8}$$

такимъ образомъ *на каждой поверхности существуютъ* (дѣйствительныя или мнимыя) *точки, въ которыхъ направленія линій кривизны неопредѣленны.* Такія точки называются *умбиликами* или *шаровыми точками,* или *точками округленія* [1]).

Въ шаровыхъ точкахъ шаръ имѣетъ съ поверхностью *соприкосновеніе 2-го порядка.*

Дѣйствительно, чтобы шаръ

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+(Z-\zeta)^2-r^2=0,$$

имѣлъ съ поверхностью

$$z=f(x, y)$$

соприкосновеніе 2-го порядка, должны быть выполнены шесть условій:

$$\begin{gathered}(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-r^2=0,\\ (x-\xi)+p(z-\zeta)=0,\\ y-\eta+q(z-\zeta)=0,\\ 1+p^2+r(z-\zeta)=0,\\ pq+s(z-\zeta)=0,\\ 1+q^2+t(z-\zeta)=0,\end{gathered}$$

вообще говоря, несовмѣстимыхъ. Но для шаровой точки въ силу соотношеній (8) три послѣднія уравненія сводятся къ одному:

$$z-\zeta=-\frac{1+p^2}{r}=-\frac{pq}{s}=-\frac{1+q^2}{t}=\tau.$$

Три первыя уравненія даютъ теперь η, ξ, r:

$$\begin{gathered}x-\xi=-p\tau, \quad y-\eta=-q\tau,\\ r^2=(p^2+q^2+1)\tau^2,\end{gathered}$$

и уравненіе соприкасающагося шара для шаровой точки будетъ:

$$(X-x-p\tau)^2+(Y-y-q\tau)^2+(Z-\zeta+\tau)^2=(p^2+q^2+1)\tau^2$$

или

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2-2\tau\,[p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)]=0.$$

---

[1]) По французски: ombilics; по нѣмецки: Nabelpuncte.

Геометрически очевидно, что каждая точка шаровой поверхности есть умбилика, ибо всѣ нормальныя сѣченія суть большіе круги. То же можно получить и помощью счета.

Дѣйствительно, дифференцируя

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-\rho^2=0\,,$$

находимъ:

$$x-a+p(z-c)=0\,,\quad y-b+q(z-c)=0$$

$$1+p^2+r(z-c)=0\,,\quad pq+s(z-c)=0$$

$$1+q^2+t(z-c)=0\,,$$

т. е. урав. (8) выполнены, и общее значеніе трехъ отношеній есть $\left(-\dfrac{1}{z-c}\right)$.

Кромѣ асимптотическихъ линій и линій кривизны, имѣемъ еще одну систему замѣчательныхъ кривыхъ на поверхности,—такъ называемыя *геодезическія линіи*, о которыхъ необходимо упомянуть.

§ 23. Геодезическія линіи.

Геодезическія линіи поверхности суть тѣ ея линіи, для каждой точки которыхъ выпрямляющею плоскостью является плоскость, касательная къ поверхности въ этой точкѣ, и которыхъ главныя нормали совпадаютъ поэтому съ нормалями къ поверхности, или еще иначе: которыхъ соприкасающаяся плоскость перпендикулярна въ касательной плоскости поверхности.

Послѣднее опредѣленіе ближе указываетъ на основное свойство геодезическихъ линій—это суть линіи, во всѣхъ точкахъ которыхъ *геодезическая кривизна* равна нулю. Такъ по O. Bonnet называютъ введенное F. Minding'омъ выраженіе

$$\frac{\cos i}{R}\,,$$

гдѣ R — радіусъ 1-ой кривизны кривой и i — уголъ соприкасающейся плоскости кривой съ касательной плоскостью поверхности.

Если уравненіе поверхности возьмемъ, какъ и выше,

$$z=f(x\,,\,y)\,,$$

то приведенное выше опредѣленіе даетъ:

$$\frac{l}{p}=\frac{m}{q}=\frac{n}{-1} \tag{1}$$

и, слѣдовательно, уравненія (II, 1, 3) § 6:

$$\left.\begin{aligned} \alpha l+\beta m+\gamma n=0 \\ \lambda l+\mu m+\nu n=0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

перепишутся:

$$px'+qy'-z'=0. \tag{3}$$

$$p(y'z''-z'y'')+q(z'x''-x'z'')-(x'y''-y'x'')=0. \tag{4}$$

Послѣднее уравненіе напишемъ въ видѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0.$$

Умножая члены перваго столбца на p, второго на q и вычитая сумму изъ членовъ третьяго столбца, получимъ:

$$\begin{vmatrix} p & q & -(1+p^2+q^2) \\ x' & y' & z'-px'-qy' \\ x'' & y'' & z''-px''-qy'' \end{vmatrix}=0.$$

Но производная отъ (3) даетъ:

$$z''-px''-qy''=p'x'+q'y'=rx'^2+2sx'y'+ty'^2$$

и такимъ образомъ опредѣлитель принимаетъ видъ:

$$\begin{vmatrix} p & q & -(p^2+q^2+1) \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & rx'^2+2s'xy'+ty'^2 \end{vmatrix}=0,$$

что по раскрытіи даетъ:

$$0=(rx'^2+2sx'y'+ty'^2)(py'-qx')-(1+p^2+q^2)(x'y''-y'x''),$$

По умноженіи на ds^3 получимъ:

$$0=(rdx^2+2sdxdy+tdy^2)(pdy-qdx)-(1+p^2+q^2)(dxd^2y-dyd^2x).$$

Это дифференціальное уравненіе 2-го порядка между x и y, проинтегрировавъ которое опредѣлимъ цилиндры, вырѣзающіе на поверхности ея геодезическія линіи, уравненіемъ, зависящимъ отъ двухъ произвольныхъ постоянныхъ. Можно поэтому провести геодезическую линію черезъ любую точку поверхности, такъ чтобы ея касательная имѣла опредѣленное направленіе; такимъ образомъ черезъ каждую точку проходитъ вообще пучекъ геодезическихъ линій.

Геодезическія линіи замѣчательны тѣмъ, что онѣ представляютъ (съ извѣстными ограниченіями) кратчайшее разстояніе между двумя точками поверхности. Онѣ представляютъ форму равновѣсія тяжелой, гибкой и нерастяжимой нити, лежащей на поверхности. Если точка движется по поверхности безъ тренія и безъ ускорительной силы, то она описываетъ геодезическую линію.

Эти свойства геодезическихъ линій доказываются въ соотвѣтствующихъ главахъ варіаціоннаго исчисленія и механики.

Кривизна поверхностей.

§ 24. Кривизна линій, проведенныхъ на поверхности.

Индикатриса Дюпена позволяетъ характеризовать поверхность вблизи ея обыкновенной точки помощью типа сѣченій, параллельныхъ касательной плоскости. Чтобы дополнить эту характеристику, разсмотримъ, какую кривизну имѣютъ въ точкѣ поверхности различныя, проведенныя черезъ нее на поверхности, кривыя. При этомъ сначала покажемъ, что достаточно разсматривать только плоскія кривыя (теор. I), затѣмъ, что изъ плоскихъ сѣченій достаточно разсматривать лишь нормальныя (т. е. образованныя плоскостями, проходящими черезъ нормаль къ поверхности) (теор. II), и послѣ этого обратимся къ изученію кривизны послѣднихъ.

Теорема I. *Кривизна* (первая) *какой-нибудь кривой, проведенной на данной поверхности черезъ обыкновенную ея точку, одинакова въ этой точкѣ съ кривизною плоской кривой, по которой поверхность пересѣкается соприкасающейся плоскостью первой кривой.*

Пусть

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

данная поверхность и (x, y, z) — ея обыкновенная точка. Пусть черезъ (x, y, z) проходитъ кривая, которая на XOY проэктируется по кривой:

$$y = \varphi(x);$$

для точекъ ея z есть функція отъ x:

$$z = f[x, \varphi(x)],$$

такъ что

$$z' = p + qy', \qquad z'' = r + 2sy' + ty'^2 + qy'', \tag{2}$$

коэффиціенты уравненія соприкасающейся плоскости кривой изобразятся:

$$\left.\begin{aligned} A &= y'(r + 2sy' + ty'^2) - py'', \\ B &= -(r + 2sy' + ty'^2) - qy'', \\ C &= y''. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Чтобы отличить точки плоскаго сѣченія, означимъ ихъ координаты X, Y, Z; онѣ опредѣлятся уравненіями:

$$Z = f(X, Y) \tag{1'}$$

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0, \tag{4}$$

гдѣ A, B, C имѣютъ значенія (3).

Производная по X отъ (1′) и (4) даетъ для точки (x, y, z):

$$Z' = p + qY' \tag{5}$$

$$Z'' = r + 2sY' + tY'^2 + qY'' \tag{5'}$$

$$(y' - Y')(r + 2sy' + ty'^2) + y'(Z' - p - qY') = 0 \tag{6}$$

$$-Y''(r + 2sy' + ty'^2) + y''(Z'' - qY'') = 0. \tag{7}$$

Съ помощью двухъ первыхъ послѣднія два приводятся къ виду

$$(y' - Y')(r + 2sy' + ty'^2) = 0 \tag{6'}$$

$$-Y''(r + 2sy' + ty'^2) + y''(r + 2sY' + tY'^2) = 0. \tag{7'}$$

Первое даетъ

$$Y' = y',$$

если

$$r + 2sy' + ty'^2 \neq 0, \tag{8}$$

и тогда 2-ое даетъ

$$y'' = Y''.$$

Но если такъ, то въ силу (5), (5′) и (2) имѣемъ

$$Z' = z', \quad Z'' = z''.$$

Такимъ образомъ въ точкѣ (x, y, z) одинаковыя значенія имѣютъ первыя и вторыя производныя и для кривой двоякой кривизны и для сѣченія ея соприкасающейся плоскостью поверхности. Но выраженіе для радіуса первой кривизны

$$R = \pm \frac{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}}{\sqrt{y''^2+z''^2+(y'z''-z'y'')^2}} \tag{9}$$

только отъ производныхъ 1-го и 2-го порядка и зависитъ. Поэтому радіусы кривизны для той и другой кривой одинаковы, что и т. д.

Что касается условія (8), то оно выдѣляетъ асимптотическія линіи, для которыхъ, какъ мы видѣли,

$$r + 2sy' + ty'^2 = 0. \tag{10}$$

Для нихъ соприкасающеюся плоскостью будетъ касательная плоскость, а эта послѣдняя, какъ было доказано, пересѣкаетъ поверхность по кривой, имѣющей въ точкѣ прикосновенія особенную точку. Касательныя въ этой точкѣ и будутъ касательными къ соотвѣтственнымъ асимптотическимъ линіямъ; дѣйствительно, уравненіе (6′) для асимптотическихъ линій въ силу (10) удовлетворится, а (7′) даетъ

$$r + 2sY' + tY'^2 = 0,$$

что вмѣстѣ съ (10) и даетъ

$$y' = Y'.$$

Но y'' и Y'' не равны, а слѣдовательно, не равны и $z'' = qy''$ и $Z'' = qY''$ (11), такъ что прикосновеніе асимптотической линіи съ кривой, по которой ея соприкасающаяся плоскость пересѣкаетъ поверхность, будетъ вообще только 1-го порядка (J. M. de la Gournerie). Связь между радіусами кривизны двухъ кривыхъ однако и въ этомъ случаѣ очень проста. Дифференцируя (1′) три раза, имѣемъ для точки (x, y, z) асимптотической линіи

$$k + 3ly' + 3my'^2 + ny'^3 + 3(s + ty')\,Y'' = 0,$$

дифференцированіе же (10) доставитъ для той же точки

$$k + 3ly' + 3my'^2 + ny'^3 + 2(s + ty')\,y'' = 0.$$

Итакъ при $s + ty' \neq 0$ должно быть $3Y'' = 2y''$, а слѣдовательно, въ силу (11) и $3Z'' = 2z''$. *Отсюда радіусъ кривизны асимптотической линіи равенъ двумъ третямъ радіуса кривизны сѣченія поверхности ея касательною плоскостью въ точкѣ прикосновенія* (Beltrami). Во всякомъ случаѣ изученіе кривизны линій, проводимыхъ на поверхности черезъ данную ея точку, сводится къ изученію кривизны плоскихъ ея сѣченій.

Теорема II (Мёнье). *Если черезъ одну и ту же прямую, касательную къ поверхности, провести двѣ плоскости,—одну проходящую черезъ нормаль, и другую, дѣлающую съ первой уголъ φ, то радіусъ кривизны наклоннаго сѣченія есть проэкція радіуса кривизны нормальнаго сѣченія на эту плоскость,*

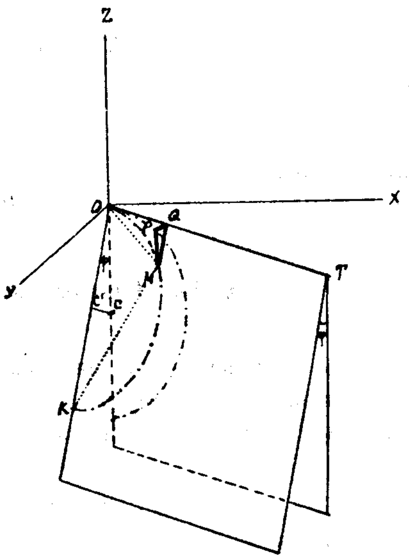
$$\varrho = R . \cos \varphi .$$

Пусть M точка наклоннаго сѣченія, безконечно близкая къ 0,—ее можно считать также принадлежащею кругу кривизны этого сѣченія въ точкѣ 0. Опуская изъ M перпендикуляръ MP на касательную плоскость и MQ на касательную прямую, изъ прямоугольнаго треугольника MPQ (въ которомъ уголъ QMP равенъ φ,— углу, служащему мѣрою двуграннаго угла между плоскостями ZOQ и MOQ) имѣемъ:

$$MP = MQ . \cos \varphi .$$

Если OK—діаметръ круга кривизны разсматриваемаго сѣченія, перпендикулярный къ OQ, то изъ подобія треугольниковъ OKM и OMQ имѣемъ:

$$\frac{MQ}{OM} = \frac{OM}{OK} .$$



Черт. 46.

Означая ϱ—радіусъ кривизны и считая безконечно-малую хорду OM равною безконечно-малой дугѣ ds между тѣми же точками, найдемъ:

$$MQ = \frac{ds^2}{2\varrho} ,$$

и, слѣдовательно,

$$MP = \frac{ds^2}{2\varrho} . \cos \varphi .$$

Но мы уже выводили выраженіе для длины перпендикуляра на касательную плоскость (отбрасывая безконечно малыя высшихъ порядковъ):

$$MP = \frac{1}{2} \frac{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} .$$

Такимъ образомъ

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{rx'^2+2sx'y'+ty'^2}{\cos\varphi\,.\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Здѣсь x' и y' означаютъ косинусы угловъ касательной въ O съ осями OX и OY. Если поэтому проведемъ черезъ эту касательную и нормаль плоскость, то для полученнаго сѣченія r, s, t, x', y' сохранятъ тѣ же значенія, но ϱ замѣнится черезъ R, и $\varphi=0$.

Такимъ образомъ

$$\frac{1}{R}=\frac{rx'^2+2sx'y'+ty'^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \tag{12}$$

и

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{R\cos\varphi};$$

слѣдовательно

$$\varrho=R\cos\varphi.$$

§ 25. Главныя нормальныя сѣченія.

Мы пока не дѣлали никакихъ предположеній о выборѣ системы координатъ. Примемъ теперь точку поверхности за начало координатъ, касательную плоскость за плоскость XOY. Тогда для начала координатъ

$$p=q=0\,,\quad x'=\cos\alpha\,,\quad y'=\sin\alpha\,,\quad z'=0.$$

и (12) даетъ

$$\frac{1}{R}=r_0\cos^2\alpha+2s_0\cos\alpha\,.\sin\alpha+t_0\sin^2\alpha \tag{12'}$$

или, если ввести $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$,

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{2}(r_0+t_0)+s_0\sin 2\alpha+\frac{1}{2}(r_0-t_0)\cos 2\alpha.$$

Съ измѣненіемъ α, т. е. при вращеніи сѣкущей плоскости около нормали, значеніе R мѣняется. Наибольшее или наименьшее значеніе R получитъ для α, выполняющаго уравненіе

$$0=2s_0\cos 2\alpha-(r_0-t_0)\sin 2\alpha,$$

т. е. при

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2s_0}{r_0 - t_0} \tag{13}$$

Для α такимъ образомъ получаемъ *два* значенія: α_0 и $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$, — ибо α опредѣлено по тангенсу двойного угла.

Переписываемъ (12′) подъ видомъ:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2}(r_0 + t_0) + \frac{1}{2}\cos 2\alpha\,(2s_0 . \operatorname{tg} 2\alpha + r_0 - t_0) =$$
$$= \frac{1}{2}(r_0 + t_0) + \frac{1}{2}\cos 2\alpha\,\frac{4s_0^2 + (r_0 - t_0)^2}{r_0 - t_0}.$$

Но соотвѣтственно двумъ значеніямъ α_0 и $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ и $\cos 2\alpha$ принимаетъ два значенія

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \pm\frac{r_0 - t_0}{\sqrt{4s_0^2 + (r_0 - t_0)^2}}.$$

Такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{2}\left[(r_0 + t_0) + \sqrt{4s_0^2 + (r_0 - t_0)^2}\right] \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{2}\left[(r_0 + t_0) - \sqrt{4s_0^2 + (r_0 - t_0)^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Одно значеніе будетъ наибольшимъ, другое — наименьшимъ. Дѣйствительно, 2-я производная

$$\left(\frac{1}{R}\right)''_\alpha \equiv -2\left\{2s_0 \sin 2\alpha + (r_0 - t_0)\cos 2\alpha\right\} = -2\cos 2\alpha\left\{\frac{4s_0^2 + (r_0 - t_0)^2}{r_0 - t_0}\right\}$$

принимаетъ тотъ или другой знакъ, смотря по тому, какой знакъ придать $\cos 2\alpha$.

Эти наибольшій и наименьшій радіусъ кривизны называются *главными радіусами кривизны* для точки поверхности, а соотвѣтствующія нормальныя сѣченія—*главными нормальными сѣченіями*.

Сравнивая формулу (13) съ (6) § 21, заключаемъ:

Теорема III. *Направленія касательныхъ, соотвѣтствующихъ главнымъ нормальнымъ сѣченіямъ, совпадаютъ съ направленіями осей индикатрисы Дюпена.*

Слѣдовательно, ***линіи кривизны имѣютъ своими касательными касательныя главныхъ нормальныхъ сѣченій.***

Если за оси OX и OY (пока произвольныя по направленію) взять именно эти направленія осей индикатрисы, то уравненіе индикатрисы приметъ видъ

$$r_1 x^2 + t_1 y^2 = 1\,, \quad \text{ибо} \quad s_1 = 0$$

и уравненіе (13) дастъ

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 0$$

т. е.

$$\alpha_0 = 0\,, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Соотвѣтствующія значенія по (9):

$$\frac{1}{R_1} = r_1\,, \quad \frac{1}{R_2} = t_1$$

и такимъ образомъ

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha\,.$$

Такова связь между радіусомъ какого-нибудь нормальнаго сѣченія и радіусами главныхъ нормальныхъ сѣченій.

Пусть R' — радіусъ кривизны для сѣченія, перпендикулярнаго къ первому:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1}\sin^2\alpha + \frac{1}{R_2}\cos^2\alpha\,.$$

Складывая получаемъ:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\,. \tag{15}$$

Отсюда:

Теорема IV (Эйлера). *Сумма мѣръ кривизны двухъ взаимно-перпендикулярныхъ нормальныхъ сѣченій равна суммѣ мѣръ кривизны главныхъ нормальныхъ сѣченій.*

Величина

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

фигурирующая въ (15), называется *среднею кривизною.*

Если эта величина равна нулю, то главные радіусы кривизны равны по величинѣ, но направлены въ противоположныя стороны.

§ 26. Поверхность центровъ кривизны.

Координаты центра кривизны одного изъ главныхъ нормальныхъ сѣченій суть

$$X = x + \frac{pR_1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad Y = y + \frac{qR_1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$Z = z - \frac{R_1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

и другого:

$$X = x + \frac{pR_2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Y = y + \frac{qR_2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$Z = z - \frac{R_2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Соотвѣтственно каждой точкѣ поверхности получимъ двѣ точки— два центра кривизны. Когда точка описываетъ данную поверхность, эти точки описываютъ другую поверхность, состоящую изъ двухъ полостей и называемую *поверхностью центровъ кривизны*, или *центральной поверхностью*, или *эволютою* данной поверхности.

Въ точкахъ округленія двѣ полости смыкаются между собою.

Въ частныхъ случаяхъ эволюта поверхности можетъ сводиться однако къ кривымъ линіямъ и даже отдѣльнымъ точкамъ. Такъ, въ шарѣ вся поверхность центровъ сводится къ одной точкѣ—къ его центру.

Въ поверхности вращенія каждая нормаль встрѣчаетъ ось вращенія (см. далѣе), поэтому одна изъ плоскостей поверхности центровъ сводится къ оси вращенія. Другая полость образуется вращеніемъ около той же оси эволюты меридіанальной кривой поверхности.

Поверхности трубчатыя,—образуемыя перенесеніемъ круга, котораго центръ перемѣщается по кривой

$$\xi = \varphi(\tau), \quad \eta = \psi(\tau), \quad \zeta = \chi(\tau),$$

а плоскость остается перпендикулярной къ этой кривой

$$[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 - r^2 = 0, \quad \xi'(x-\xi) + \eta'(y-\eta) + \zeta'(z-\zeta) = 0],$$

одною изъ полостей центральной поверхности имѣютъ кривую

$$\xi = \varphi(\tau), \quad \eta = \psi(\tau), \quad \zeta = \chi(\tau).$$

§ 27. Геометрическое мѣсто круговъ кривизны нормальныхъ сѣченій.

Пусть снова плоскость XOY есть касательная плоскость къ поверхности

$$z = f(x\,,\ y)\,, \tag{1}$$

и начало координатъ—точка поверхности.

Возьмемъ какое нибудь нормальное сѣченіе плоскостью

$$y = mx\,.$$

Соотвѣтствующій кругъ кривизны опредѣлится уравненіемъ (2) и уравненіемъ

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$$

гдѣ

$$\frac{1}{R} = r_0 \cos^2\alpha + 2s_0 \cos\alpha \sin\alpha + t_0 \sin^2\alpha \quad (\text{если } \operatorname{tg}\alpha = m)$$

$$= \frac{r_0 + 2s_0 m + t_0 m^2}{1 + m^2}\,.$$

Такимъ образомъ

$$\left\{\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2z(1 + m^2)}{r_0 + 2s_0 m + t_0 m^2}\,, \\ & y = mx \end{aligned}\right.$$

суть уравненія круга кривизны. Измѣняя m, какъ геометрическое мѣсто этихъ круговъ, получимъ поверхность 4-го порядка:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(r_0 x^2 + 2s_0 xy + t_0 y^2) - 2z(x^2 + y^2) = 0\,.$$

Въ этой поверхности ось z-овъ (нормаль къ (1)) является двойною линіей.

§ 28. Другой способъ нахожденія главныхъ нормальныхъ сѣченій.

Возвращаемся къ общему выраженію (9) для мѣры кривизны нормальнаго сѣченія. Если обозначимъ какъ и ранѣе, α, β, γ косинусы угловъ касательной къ кривой съ осями OX, OY, OZ, то имѣемъ дифференцируя уравненіе

$$z = f(x\,,\ y)\,, \tag{1}$$

которому должна удовлетворять каждая точка кривой, лежащей на этой поверхности:

$$0 = p\alpha + q\beta - \gamma\,. \tag{16}$$

Это слѣдуетъ также изъ перпендикулярности касательной къ кривой съ нормалью къ поверхности. Подставляя это значеніе γ въ соотношеніе

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\,,$$

получимъ

$$\alpha^2(1+p^2)+2\alpha\beta pq+\beta^2(1+q^2)=1\,. \tag{17}$$

Такимъ образомъ разысканіе главныхъ нормальныхъ сѣченій сводится къ нахожденію maximum-minimum выраженія:

$$\frac{1}{R}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,,$$

если α и β связаны условіемъ (17). Для этого нужно, по извѣстному правилу, искать maximum-minimum

$$\Phi(\alpha\,,\,\beta)=r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2-K\left[\alpha^2(1+p^2)+2pq\alpha\beta+\beta^2(1+q^2)\right],$$

считая α и β независимыми,—такимъ образомъ получаемъ

$$\frac{1}{2}\,\Phi'_\alpha=r\alpha+s\beta-K\left[\alpha(1+p^2)+\beta\,.pq\right]=0\,, \tag{18}$$

$$\frac{1}{2}\,\Phi'_\beta=s\alpha+t\beta-K\left[\alpha\,.\,pq+\beta(1+q^2)\right]=0\,. \tag{19}$$

Умножая (18) на α, (19) на β и складывая, получимъ съ помощью (17):

$$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2-K=0\,,$$

т. е. K есть значеніе, пріобрѣтаемое

$$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$$

при α и β, удовлетворяющихъ (18) и (19), или, иными словами, K и есть искомое наибольшее или наименьшее значеніе

$$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2\,.$$

Такимъ образомъ

$$K=\frac{1}{R}\,.\,\sqrt{1+p^2+q^2}\,,\quad\text{или}\quad \frac{1}{R}=\frac{K}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,. \tag{20}$$

Самыя α и β намъ не нужны. Для вычисленія K замѣтимъ, что

(18) и (19), разсматриваемыя какъ уравненія для α, β; могутъ быть совмѣстны лишь при K, выполняющемъ условіе

$$0 = \begin{vmatrix} r - K(1+p^2) & s - K \, . \, pq \\ s - K \, . \, pq & t - K(1+q^2) \end{vmatrix} \tag{21}$$

Производя перемноженія и расположивъ по степенямъ K, найдемъ:

$$K^2(1+p^2+q^2) - K[r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2)] + rt - s^2 = 0 . \tag{22}$$

Вводя сюда вмѣсто K его выраженіе черезъ R по (20), получимъ уравненіе

$$(1+p^2+q^2)^2 . \frac{1}{R^2} - [r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2)] . \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} + \\ + rt - s^2 = 0 , \tag{23}$$

корни котораго R_1 и R_2 и суть главные радіусы кривизны.

§ 29. Средняя кривизна. Минимальныя поверхности.

По свойству корней квадратнаго уравненія изъ (23):

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} . \tag{24}$$

Величина

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) ,$$

какъ упомянуто выше, называется *среднею кривизною*.

Причина такого названія понятна: на основаніи теоремы Эйлера (§ 25) величина эта представляетъ среднее ариѳметическое мѣръ кривизны всѣхъ нормальныхъ сѣченій въ точкѣ (x, y, z). По (24) поверхности, для которыхъ эта величина равна нулю, удовлетворяютъ дифференціальному уравненію:

$$r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2) = 0 , \tag{26}$$

которое въ такихъ поверхностяхъ выполняется всѣми точками.

Поверхности эти называются *минимальными*. Еще Lagrange пришелъ къ уравненію (26) рѣшая задачу: провести черезъ данную кривую поверхность, площадь которой была бы наименьшею. Въ опытахъ Plateau и др. такія поверхности осуществляются экспериментально съ помощью жидкихъ пленокъ, въ силу поверхностнаго натяженія принимающихъ форму поверхностей съ наименьшею площадью при данномъ контурѣ. Такимъ образомъ средняя кривизна имѣетъ значеніе для математической физики.

Примѣры минимальныхъ поверхностей:

1) Обыкновенная винтовая поверхность (геликоидъ) $z = arctg \frac{y}{x}$, притомъ это единственная минимальная поверхность *линейчатая* (E. Catalan).

2) Катеноидъ—поверхность, получаемая вращеніемъ цѣпной линіи

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$$

около оси z-овъ; притомъ это единственная минимальная поверхность вращенія (Meusnier).

3) Минимальная поверхность Scherk'a: $e^{az} = \frac{\cos ax}{\cos ay}$.

Для *данной* поверхности $z = f(x, y)$ (1) (не минимальной) (26) опредѣляетъ на поверхности (1) *кривую*, во всѣхъ точкахъ которой средняя кривизна равна нулю и, стало быть, радіусы кривизны главныхъ нормальныхъ сѣченій равны по величинѣ, но направлены въ противоположныя стороны.

Минимальныя поверхности—частный случай *поверхностей постоянной средней кривизны*, которыя опредѣляются уравненіемъ:

$$\frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} = \mathrm{Const} = a.$$

§ 30. Полная или Гауссова кривизна.

Произведеніе корней уравненія (23) равно:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Эта величина называется *полною* или *Гауссовой кривизной*. Если эта величина положительна, то радіусы кривизны—одного знака и, слѣдовательно, направлены въ одну сторону. То же самое значеніе имѣетъ Гауссова кривизна и для другой стороны поверхности (тогда только оба радіуса R_1 и R_2 измѣняютъ знакъ на обратный). Такъ какъ для этого должно быть $rt - s^2 > 0$, то мы получаемъ другое значеніе классификаціи, основанной на разсмотрѣніи индикатрисы Дюпена: *въ эллиптической точкѣ поверхности Гауссова кривизна положительна.*

Если $\frac{1}{R_1 R_2} < 0$, то главные радіусы противоположныхъ знаковъ, главные центры кривизны (центры круговъ кривизны главныхъ нормальныхъ сѣченій) лежатъ по разныя стороны касательной плоскости.

Тогда должно быть $rt - s^2 < 0$: *точка гиперболическая имѣетъ отрицательную Гауссову кривизну.*

Если, наконецъ, $rt - s^2 = 0$, одинъ изъ радіусовъ кривизны обращается въ ∞.

Въ параболической точкѣ поверхности Гауссова кривизна равна нулю.

Параболическія точки поверхности образуютъ на ней, вообще говоря, кривую линію,— пересѣченіе поверхности $z = f(x, y)$ съ поверхностью $rt - s^2 = 0$.

Эта линія называется *параболическою линіей* поверхности. Въ ея точкахъ Гауссова кривизна равна нулю, и она отдѣляетъ тѣ части поверхности, въ которыхъ Гауссова кривизна положительна, отъ тѣхъ, гдѣ она отрицательна.

Если въ каждой точкѣ поверхности $rt - s^2 = 0$, т. е. если каждая точка параболическая, Гауссова кривизна равна во всѣхъ точкахъ нулю. Такія поверхности называются *поверхностями нулевой кривизны.* Какъ увидимъ далѣе, это суть развертывающіяся поверхности.

Если Гауссова кривизна во всѣхъ точкахъ поверхности положительна (стало быть всѣ точки эллиптическія), то поверхность будетъ поверхностью положительной кривизны.

Такъ, для эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \qquad \frac{(rt - s^2)\,.\,z^2}{c^4} = \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{a^2}\right)$$

стало быть $rt - s^2 > 0$.

Если во всѣхъ точкахъ Гауссова кривизна отрицательна, всѣ точки будутъ гиперболическія, поверхность будетъ поверхностью отрицательной кривизны. Въ особенности эти названія примѣняются тамъ, гдѣ кривизна (Гауссова) во всѣхъ точкахъ поверхностей одинакова не только по знаку, но и по величинѣ. Такія поверхности называются *поверхностями постоянной кривизны.* Онѣ удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \pm\, a^2.$$

Значеніе Гауссовой кривизны для характеристики поверхности выясняется изъ теоремы (Гауссова „theorema egregium“): *при изгибаніи поверхности ея полная кривизна остается безъ измѣненія.*

§ 31. Наложенiе и изгибанiе поверхностей.

Если даны двѣ поверхности

$$z = f(x, y) \quad \text{и} \quad z = F(x, y),$$

отнесенныя къ одной и той же системѣ прямоугольныхъ координатъ, то мы говоримъ, что одна поверхность *накладывается* на другую, если между точками одной и точками другой можно установить такую связь, что всякой кривой, лежащей на одной поверхности, будетъ соотвѣтствовать на другой кривая той же *длины*. Такъ накладываются одна на другую каждыя двѣ плоскости, двѣ сферы одинаковаго радiуса. Но помимо такого наложенiя тожественныхъ поверхностей, различающихся только положенiемъ въ пространствѣ, могутъ быть накладываемы одна на другую и различныя по виду поверхности: плоскость (которую представляемъ себѣ гибкою и нерастяжимою) можетъ быть свернута въ трубку, или навита на прямой круговой цилиндръ, или на конусъ. Если изъ поверхности шара вырѣжемъ двумя плоскостями большихъ круговъ двухсторонникъ и соединимъ полукруги, служащiе его границами, то полученная поверхность такова, что накладывается на поверхность взятаго сначала шара. При этомъ наложенiе сопровождается *изгибанiемъ* поверхности безъ разрывовъ и складокъ, такъ что ни одна линiя, расположенная на поверхности, не удлиняется и не укорачивается. Длины линiй не измѣняются; слѣдовательно, дифференцiалы дуги должны быть равны.

Допустимъ, что взаимное положенiе поверхностей таково, что соотвѣтственными будутъ тѣ точки, которыхъ координаты x, y одинаковы.

Элементъ дуги

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

если кривая лежитъ на поверхности то

$$dz = pdx + qdy,$$

и потому

$$ds^2 = (1 + p^2)\, dx^2 + 2pqdxdy + (1 + q^2)\, dy^2$$

для второй поверхности пусть

$$dz = Pdx + Qdy$$

такъ что соотвѣтственный элементъ

$$ds^2 = (1 + P^2)\, dx^2 + 2PQdxdy + (1 + Q^2)\, dy^2.$$

Они должны быть равны при всѣхъ x, y, слѣдовательно должны существовать равенства

$$1 + p^2 = 1 + P^2 \qquad 2pq = 2PQ \qquad 1 + q^2 = 1 + Q^2,$$

изъ которыхъ слѣдуетъ

$$\frac{p}{P}=\frac{q}{Q}=\pm 1\,.$$

Но Гауссова кривизна зависитъ только отъ p^2, q^2, s^2 и rt, слѣдовательно для такихъ двухъ поверхностей она одинакова. Такимъ образомъ *если двѣ поверхности накладываются одна на другую, то ихъ Гауссова кривизна въ соотвѣтственныхъ точкахъ одинакова.* Тоже самое имѣетъ мѣсто и по отношенію къ такимъ двумъ поверхностямъ, изъ которыхъ одна есть результатъ изгибанія другой, что и доказываетъ справедливость вышеприведенной теоремы Гаусса. Но обратное заключеніе не имѣетъ мѣста: въ соотвѣтственныхъ точкахъ двухъ поверхностей Гауссова кривизна можетъ быть одинакова, но дифференціалы дуги могутъ быть различны, и потому поверхности не будутъ наложимы одна на другую. Такъ (примѣръ Wangerin'a) поверхность, полученная вращеніемъ логариѳмики

$$2z=\log(x^2+y^2)\,,$$

и обыкновенная винтовая поверхность

$$z=arc\,\mathrm{tang}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Гауссову кривизну имѣютъ одинаковую (отрицательную)

$$K=-\frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

но дифференціалъ дуги первой поверхности

$$ds^2=dx^2\left[1+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]+\frac{2xy\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}+\left[1+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]dy^2$$

а на второй:

$$ds^2=dx^2\left[1+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]-\frac{2xy\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}+\left[1+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]dy^2\,;$$

здѣсь

$$p=Q\quad q=-P.$$

Откуда

$$r=S\,,\quad s=-R=T\,,\quad t=-S\,,$$

и слѣдовательно,

$$1+p^2+q^2=1+Q^2+P^2$$

$$rt-s^2=RT-S^2.$$

§ 32. Огибающая семейства поверхностей, зависящаго отъ двухъ параметровъ.

Уравненіе

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \tag{1}$$

гдѣ a и b—два произвольныхъ параметра, опредѣляетъ семейства поверхностей [1]). Какая-нибудь поверхность a, b семейства соотвѣтствующая значеніямъ a, b параметровъ, пересѣкается съ безконечно-близкою поверхностью того же семейства

$$F(x, y, z, a+da, b+db) = 0 \tag{1'}$$

по кривой, при опредѣленіи которой можно (1′) съ помощью (1) замѣнить черезъ

$$0 = F'_a(x, y, z, a+\theta da, b+\theta_1 db)\, da + \\ + F'_b(x, y, z, a+\theta da, b+\theta_1 db)\, db.$$

Всѣ эти поверхности въ предѣлѣ проходятъ, каково бы ни было отношеніе $da : db$, черезъ точки, которыя удовлетворяютъ (1) и уравненіямъ:

$$0 = F'_a(x, y, z, a, b), \quad 0 = F'_b(x, y, z, a, b), \tag{2}$$

и которыя называютъ *характеристическими точками*. Ихъ геометрическое мѣсто называется *огибающей* семейства (1).

Теорема: *Каждая изъ поверхностей семейства (1) касается въ характеристическихъ точкахъ съ огибающей.*

Дѣйствительно, изъ (2) можно найти a и b въ функціи (x, y, z) и подставить $a = \varphi(x, y, z)$, $b = \psi(x, y, z)$ въ (1). Результатъ и будетъ уравненіе огибающей. Если (x_0, y_0, z_0) есть ея характеристическая точка, то для нея (2) дадутъ соотвѣтственно значенія a_0 и b_0 параметровъ a и b, такъ что

$$a_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0), \quad b_0 = \psi(x_0, y_0, z_0).$$

Касательная къ поверхности (1), соотвѣтствующей этимъ значеніямъ a, b, т. е.

$$F(x, y, z, a_0, b_0) = 0,$$

въ точкѣ (x_0, y_0, z_0) имѣетъ своимъ уравненіемъ:

$$(F'_x)_0 (X - x_0) + (F'_y)_0 (Y - y_0) + (F'_z)_0 (Z - z_0) = 0, \tag{3}$$

гдѣ

$$(F'_x)_0 = F'_x(x_0, y_0, z_0, a_0, b_0) \text{ и т. д.}$$

---

[1]) Если уравненіе содержитъ *одинъ* параметръ, оно опредѣляетъ ∞^1 поверхностей; если параметровъ въ уравненіи *два* независимыхъ, то ∞^2, и вообще, если уравненіе зависитъ отъ n параметровъ, то оно опредѣлитъ ∞^n поверхностей.

Для огибающей касательная будетъ

$$(F'_x + F'_a . a'_x + F'_b . b'_x)(X-x) + (F'_y + F'_a . a'_y + F'_b . b'_y)(Y-y) + \\ + (F'_z + F'_a . a'_z + F'_b . b'_z)(Z-z) = 0 ,$$

что съ помощью (1) приводится къ виду

$$F'_x(X-x) + F'_y(Y-y) + F'_z(Z-z) = 0 , \tag{4}$$

гдѣ a и b должны быть замѣнены черезъ φ и ψ. Но для точки (x_0, y_0, z_0) φ и ψ принимаютъ значенія a_0 и b_0, и, слѣдовательно, (4) обращается въ (3).

Касательная плоскость огибающей и поверхности семьи въ характеристической точкѣ будетъ одна и та же.

Приложеніе теоріи огибающихъ представляетъ теорема: *поверхность* (мѣсто точекъ) *можетъ быть разсматриваема, какъ огибающая ея касательныхъ плоскостей.*

Для развертывающихся поверхностей мы это уже имѣли. Въ уравненіи:

$$p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0 , \tag{5}$$

p, q и z суть функціи x, y. Огибающая поэтому опредѣлится (5) и условіями

$$\left. \begin{aligned} r(X-x) + s(Y-y) - p + p = 0 \quad \text{или} \quad r(X-x) + s(Y-y) = 0 \\ s(X-x) + t(Y-y) - q + q = 0 \quad \text{или} \quad s(X-x) + t(Y-y) = 0 . \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

Если $rt - s^2 \neq 0$ (а при $rt - s^2 = 0$ поверхность будетъ развертывающеюся, какъ увидимъ далѣе), то изъ (6) слѣдуетъ: $X = x$, $Y = y$, т. е. характеристическою точкою будетъ на каждой изъ касательныхъ плоскостей (5) именно точка прикосновенія.

Иногда въ уравненіе семьи поверхностей входитъ не два параметра, между собою независимыхъ, а три или болѣе, связанныхъ между собою столькими соотношеніями, что независимыми остаются два. Этотъ случай разрѣшается такъ же, какъ и аналогичный случай плоскихъ кривыхъ.

Возьмемъ для простоты случай трехъ параметровъ, связанныхъ однимъ соотношеніемъ:

$$F(x , y , z , a , b , c) = 0 , \tag{7}$$

$$\varphi(a , b , c) = 0 . \tag{7'}$$

По предыдущему должно быть:

$$F'_a + F'_c \frac{\partial c}{\partial a} = 0, \tag{8}$$

$$F'_b + F'_c \frac{\partial c}{\partial b} = 0, \tag{9}$$

при чемъ $\frac{\partial c}{\partial a}$ и $\frac{\partial c}{\partial b}$ опредѣляются изъ уравненій:

$$\varphi'_a + \varphi'_c \frac{\partial c}{\partial a} = 0 \tag{10}$$

$$\varphi'_b + \varphi'_c \frac{\partial c}{\partial b} = 0 \tag{11}$$

Исключая отсюда $\frac{\partial c}{\partial a}$ и $\frac{\partial c}{\partial b}$, получимъ два уравненія:

$$F'_a \cdot \varphi'_c - F'_c \cdot \varphi'_a = 0, \tag{12}$$

$$F'_b \cdot \varphi'_c - F'_c \cdot \varphi'_b = 0, \tag{13}$$

остается исключить a, b, c изъ (7), (7′), (12) и (13).

Но очень часто лучше поступать такъ: множимъ (10) и (11) на неопредѣленный множитель λ и складываемъ соотвѣтственно съ (8) и (9); получимъ:

$$F'_a + \lambda\varphi'_a + \frac{\partial c}{\partial a}(F'_c + \lambda\varphi'_c) = 0, \tag{14}$$

$$F'_b + \lambda\varphi'_b + \frac{\partial c}{\partial b}(F'_c + \lambda\varphi'_c) = 0. \tag{15}$$

Произвольностью λ воспользуемся, чтобы обратить въ 0 коэффиціентъ при $\frac{\partial c}{\partial a}$ и $\frac{\partial c}{\partial b}$, т. е. положимъ:

$$F'_c + \lambda\varphi'_c = 0. \tag{16}$$

Тогда (14) и (15) приводятся къ:

$$F'_a + \lambda\varphi'_a = 0, \quad F'_b + \lambda\varphi'_b = 0, \tag{17}$$

и изъ пяти уравненій: (7), (7′), (16) и (17) исключимъ a, b, c и λ.

Это равносильно тому, что беремъ частныя производныя по a, b, c, какъ независимымъ перемѣннымъ, отъ $F + \lambda\varphi$, приравниваемъ ихъ нулю и вдобавокъ разсматриваемъ (7) и (7′).

Примѣръ 1) Найти огибающую плоскостей

$$\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}+\frac{Z}{c}=1,$$

если параллелепипедъ, построенный на a, b, c, имѣетъ постоянный объемъ $abc=q^3$.

Замѣнивъ послѣднее условное уравненіе другимъ:

$$\lg a+\lg b+\lg c-3\lg q=0,$$

имѣемъ для опредѣленія огибающей:

$$-\frac{X}{a^2}+\frac{\lambda}{a}=0, \quad -\frac{Y}{b^2}+\frac{\lambda}{b}=0, \quad -\frac{Z}{c^2}+\frac{\lambda}{c}=0$$

откуда

$$\lambda=\frac{X}{a}=\frac{Y}{b}=\frac{Z}{c}=\frac{1}{3}.$$

Уравненіе огибающей:

$$27xyz=q^3.$$

2) Шаръ $x^2+y^2+z^2=2\alpha x+2\beta y+2\gamma z$ (α, β, γ—величины данныя) пересѣкается съ другимъ шаромъ, проходящимъ черезъ начало координатъ и имѣющимъ свой центръ на эллипсоидѣ

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1.$$

Найти поверхность, огибаемую радикальными плоскостями этихъ шаровъ.

3) Оси двухъ концентрическихъ эллипсоидовъ имѣютъ одинаковое направленіе. Показать что огибающая полярныхъ плоскостей точекъ внѣшняго эллипсоида относительно внутренняго есть третій эллипсоидъ, концентрическій съ двумя первыми.

4) Найти огибающую концентрическихъ эллипсоидовъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

въ которыхъ параллелепипедъ, построенный на осяхъ, сохраняетъ постоянный объемъ.

5) Огибающая плоскостей

$$\frac{x}{\sin\theta\cos\varphi}+\frac{y}{\sin\theta\sin\varphi}+\frac{z}{\cos\theta}=a$$

есть поверхность $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$ (Wolstenholme).

6) Огибающая плоскостей $lx+my+nz=a$, гдѣ l, m, n связаны уравненіями $l+m+n=0$, $l^2+m^2+n^2=1$ есть цилиндръ

$$(x-y)^2+(z-x)^2+(y-z)^2=3a.$$

Нѣкоторые частные типы поверхностей и ихъ дифференціальныя уравненія.

§ 33. Поверхности вращенія.

Поверхность, образуемая вращеніемъ плоской кривой около оси, лежащей въ ея плоскости, называется *поверхностью вращенія*. Образующая кривая носитъ названіе *меридіанной кривой*. Каждая точка послѣдней описываетъ при вращеніи *параллельный кругъ*, касательная въ каждой точкѣ котораго перпендикулярна къ проходящей черезъ точку плоскости соотвѣтственнаго положенія меридіанной кривой. Нормаль послѣдней перпендикулярна поэтому къ касательной параллельнаго круга, а, слѣдовательно, и къ касательной плоскости поверхности, т. е. будетъ нормалью къ поверхности. Поэтому *нормаль поверхности вращенія встрѣчаетъ ея ось вращенія*.

Если ось вращенія принята за ось Z-овъ, то условіе встрѣчи нормали

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1} \tag{1}$$

съ осью Z-овъ будетъ:

$$-\frac{x}{p}=-\frac{y}{q}, \text{ т. е. } py-qx=0. \tag{2}$$

Если уравненія оси вращенія

$$\frac{X-a}{l}=\frac{Y-b}{m}=\frac{Z-c}{n}, \tag{3}$$

то условіе пересѣченія прямыхъ (1) и (3) напишется, какъ условіе совмѣстности уравненій (1) и (3), или, означая τ общее значеніе трехъ отношеній въ (1), а σ—тоже во (2), условіе совмѣстности

$$X=p\tau+x=l\sigma+a$$

$$Y=q\tau+y=m\sigma+b$$

$$Z=-\tau+z=n\sigma+c.$$

Это условіе будетъ:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ p & q & -1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

или въ развернутомъ видѣ:

$$(x-a)(nq+m)-(y-b)(np+l)+(z-c)(pm-lq)=0. \qquad (5)$$

Къ тому же уравненію (2) придемъ, если замѣтимъ, что принявъ ось вращенія за ось Z-овъ, а въ плоскости меридіанной кривой систему осей OZ и OU, имѣемъ:

$$z=f(u) \quad \text{и} \quad u^2=x^2+y^2.$$

Отсюда

$$p=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad q=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$$

и

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=x, \qquad u\frac{\partial u}{\partial y}=y,$$

или по раздѣленіи

$$\frac{f'(u)}{u}=\frac{p}{x}=\frac{q}{y}, —$$

что и приводитъ снова къ (2).

§ 34. Коническія поверхности.

Поверхность, огибаемая плоскостями:

$$u(\alpha)(x-a)+v(\alpha)(y-b)+w(\alpha)(z-c)=0, \qquad (1)$$

проходящими черезъ неподвижную точку (a, b, c) и зависящими отъ одного параметра α, называется *коническою.* Ея уравненіе получится, если исключимъ α изъ (1) и изъ его производной по параметру α:

$$u'(x-a)+v'(y-b)+w'(z-c)=0. \qquad (2)$$

Характеристики суть прямыя, проходящія черезъ точку (a, b, c)— вершину конической поверхности. Дифференцируемъ (1), считая въ немъ параметръ α функціей (x, y), опредѣленной уравненіемъ (2),—получимъ:

$$u+wp+[u'(x-a)+v'(y-b)+w'(z-c)]\,\alpha'_x=0,$$

$$v+wq+[u'(x-a)+v'(y-b)+w'(z-c)]\,\alpha'_y=0;$$

съ помощью (2) эти уравненія приводятся къ виду:

$$u+wp=0\,,\quad v+wq=0\,.$$

Внося эти значенія u и v въ (1) и сокращая на w, получимъ:

$$(z-c)-p\,(x-a)-q\,(y-b)=0\,, \tag{3}$$

искомое дифференціальное уравненіе.

Замѣтимъ еще, что раздѣляя (1) и (2) на $(z-c)$ и рѣшая въ отношеніи $\dfrac{x-a}{z-a}$ и $\dfrac{y-b}{z-c}$, получимъ

$$\frac{x-a}{z-c}=A\,(\alpha)\,,\quad \frac{y-b}{z-c}=B\,(\alpha)\,.$$

Исключая изъ двухъ уравненій α, получимъ

$$\Phi\left(\frac{x-a}{z-c}\,,\ \frac{y-b}{z-c}\right)=0\,, \tag{4}$$

изъ котораго дифференцированіемъ по x и по y можно также получить (3). Умножая на $z-c$, получимъ уравненіе однородное относительно $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$. Если вершину принять за начало координатъ, то (3) приметъ видъ

$$z-px-qy=0\,,$$

дифференціальное уравненіе коническихъ поверхностей, имѣющихъ вершину въ началѣ координатъ. Соотвѣтственное конечное уравненіе

$$\Phi\left(\frac{x}{z}\,,\ \frac{y}{z}\right)=0\,.$$

Здѣсь Φ совершенно произвольная функція двухъ аргументовъ, допускающая по нимъ производныя.

§ 35. Цилиндрическія поверхности.

Если плоскости

$$u\,(\alpha)\,x+v\,(\alpha)\,y+\omega\,(\alpha)\,z+\tilde{\omega}\,(\alpha)=0\,, \tag{1}$$

подчинены условію—быть параллельными данной прямой

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}\,,$$

то

$$lu+mv+n\omega=0\,; \tag{2}$$

Это условіе будетъ:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ p & q & -1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

или въ развернутомъ видѣ:

$$(x-a)(nq+m)-(y-b)(np+l)+(z-c)(pm-lq)=0. \tag{5}$$

Къ тому же уравненію (2) придемъ, если замѣтимъ, что принявъ ось вращенія за ось Z-овъ, а въ плоскости меридіанной кривой систему осей OZ и OU, имѣемъ:

$$z=f(u) \quad \text{и} \quad u^2=x^2+y^2.$$

Отсюда

$$p=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad q=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$$

и

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=x, \qquad u\frac{\partial u}{\partial y}=y,$$

или по раздѣленіи

$$\frac{f'(u)}{u}=\frac{p}{x}=\frac{q}{y}, \text{—}$$

что и приводитъ снова къ (2).

§ 34. Коническія поверхности.

Поверхность, огибаемая плоскостями:

$$u(\alpha)(x-a)+v(\alpha)(y-b)+w(\alpha)(z-c)=0, \tag{1}$$

проходящими черезъ неподвижную точку (a, b, c) и зависящими отъ одного параметра α, называется *коническою*. Ея уравненіе получится, если исключимъ α изъ (1) и изъ его производной по параметру α:

$$u'(x-a)+v'(y-b)+w'(z-c)=0. \tag{2}$$

Характеристики суть прямыя, проходящія черезъ точку (a, b, c)— **вершину конической поверхности. Дифференцируемъ** (1), считая въ немъ параметръ α функціей (x, y), опредѣленной уравненіемъ (2),—получимъ:

$$u+wp+[u'(x-a)+v'(y-b)+w'(z-c)]\,\alpha'_x=0,$$

$$v+wq+[u'(x-a)+v'(y-b)+w'(z-c)]\,\alpha'_y=0;$$

съ помощью (2) эти уравненія приводятся къ виду:

$$u + wp = 0, \quad v + wq = 0.$$

Внося эти значенія u и v въ (1) и сокращая на w, получимъ:

$$(z-c) - p(x-a) - q(y-b) = 0, \tag{3}$$

искомое дифференціальное уравненіе.

Замѣтимъ еще, что раздѣляя (1) и (2) на $(z-c)$ и рѣшая въ отношеніи $\frac{x-a}{z-a}$ и $\frac{y-b}{z-c}$, получимъ

$$\frac{x-a}{z-c} = A(\alpha), \quad \frac{y-b}{z-c} = B(\alpha).$$

Исключая изъ двухъ уравненій α, получимъ

$$\Phi\left(\frac{x-a}{z-c}, \quad \frac{y-b}{z-c}\right) = 0, \tag{4}$$

изъ котораго дифференцированіемъ по x и по y можно также получить (3). Умножая на $z-c$, получимъ уравненіе однородное относительно $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$. Если вершину принять за начало координатъ, то (3) приметъ видъ

$$z - px - qy = 0,$$

дифференціальное уравненіе коническихъ поверхностей, имѣющихъ вершину въ началѣ координатъ. Соотвѣтственное конечное уравненіе

$$\Phi\left(\frac{x}{z}, \ \frac{y}{z}\right) = 0.$$

Здѣсь Φ совершенно произвольная функція двухъ аргументовъ, допускающая по нимъ производныя.

§ 35. Цилиндрическія поверхности.

Если плоскости

$$u(\alpha)x + v(\alpha)y + \omega(\alpha)z + \tilde{\omega}(\alpha) = 0, \tag{1}$$

подчинены условію—быть параллельными данной прямой

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n},$$

то

$$lu + mv + n\omega = 0; \tag{2}$$

предполагая, что $n \neq 0$, умножая (1) на n, и вычитая изъ него (2), умноженное на z, получимъ

$$u(nx - lz) + v(ny - mz) + n\varpi = 0. \tag{1'}$$

Исключая α изъ (1′) и изъ уравненія:

$$u'(nx - lz) + v'(ny - mz) + n\varpi' = 0, \tag{3}$$

получимъ огибающую, характеристики которой суть прямыя

$$nx - lz = \varphi(\alpha), \quad ny - mz = \psi(\alpha) \tag{4}$$

параллельныя прямой (2).

Дифференцируемъ (1′) по x и по y, считая, что α есть функція (x, y), опредѣленная (3); имѣемъ:

$$u(n - lp) - v.mp + \alpha'_x[u'(nx - lz) + v'(ny - mz) + n\varpi'] = 0,$$
$$-u.lq + v(n - mq) + \alpha'_y[u'(nx - lz) + v'(ny - mz) + n\varpi'] = 0.$$

Съ помощью (3) эти уравненія приводятся къ виду:

$$u(n - lp) - v.mp = 0, \quad -u.lq + v(n - mq) = 0,$$

исключая изъ которыхъ u и v получимъ;

$$(n - lp)(n - mq) - mp \,.\, lq = 0,$$

или

$$n(n - lp - mq) = 0,$$

или, отбрасывая $n \neq 0$:

$$n - lp - mq = 0. \tag{5}$$

Если бы направляющую прямую задали уравненіями:

$$x = \mu z, \quad y = \nu z,$$

то дифференціальное уравненіе было бы

$$1 = \mu p + \nu q. \tag{5'}$$

Конечное уравненіе цилиндрическихъ поверхностей получимъ исключая α изъ (4), что доставитъ:

$$\Phi(nx - lz, \; ny - mz) = 0,$$

исключая изъ котораго дифференцированіемъ произвольную функцію Φ, пришли бы къ тому же уравненію (5).

§ 36. Развертывающіяся поверхности.

Обращаемся къ общему случаю развертывающихся поверхностей, опредѣляемыхъ, какъ видѣли выше (§ 12), уравненіями

$$u(\alpha)x + v(\alpha)y + \omega(\alpha)z + \tilde{\omega}(\alpha) = 0, \tag{1}$$

$$u'(\alpha)x + v'(\alpha)y + \omega'(\alpha)z + \tilde{\omega}(\alpha) = 0. \tag{2}$$

Дифференцированіе по x и по y (1)-го даетъ

$$u(\alpha) + p\omega(\alpha) + \alpha'_x\{xu'(\alpha) + yv'(\alpha) + z\omega'(\alpha) + \tilde{\omega}'(\alpha)\} = 0,$$
$$v(\alpha) + q\omega(\alpha) + \alpha'_y\{xu'(\alpha) + yv'(\alpha) + z\omega'(\alpha) + \tilde{\omega}'(\alpha)\} = 0.$$

Съ помощью (2) эти уравненія сводятся къ:

$$u(\alpha) + p\omega(\alpha) = 0, \quad v(\alpha) + q\omega(\alpha) = 0.$$

Исключая изъ двухъ уравненій α, получимъ:

$$\Phi(p, q) = 0, \tag{3}$$

содержащее еще произвольную функцію Φ. Дифференцируя снова по x и по y получимъ:

$$\Phi'_p \,.\, r + \Phi'_q \,.\, s = 0,$$
$$\Phi'_p \,.\, s + \Phi'_q \,.\, t = 0,$$

откуда

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{t} = -\frac{\Phi'_q}{\Phi'_p}.$$

Два первыя отношенія даютъ:

$$rt - s^2 = 0, \tag{4}$$

искомое дифференціальное уравненіе развертывающихся поверхностей. Оно показываетъ, что *всѣ точки развертывающейся поверхности суть параболическія. Гауссова кривизна въ каждой точкѣ развертывающейся поверхности равна нулю.*

Если примемъ

$$\frac{\Phi'_q}{\Phi'_p} = \text{const} = m,$$

то придемъ къ случаю цилиндрическихъ поверхностей; дѣйств., тогда

$$r = ms, \quad s = mt,$$

слѣдовательно,

$$rdx + sdy = m(sdx + tdy), \; dp = mdq$$

то есть $p - mq = c$ — уравненіе, только видомъ отличное отъ выше полученнаго дифференціальнаго уравненія цилиндрическихъ поверхностей.

Для коническихъ поверхностей

$$d\,[(z-z_0) - p\,(x-x_0) - q\,(y-y_0)] = 0\,,$$

т. е.

$$(x-x_0)\,dp + (y-y_0)\,dp = 0 \quad (\text{ибо } dz = pdx + qdy)\,,$$

что при произвольномъ $\dfrac{dy}{dx}$ даетъ:

$$(x-x_0)\,r + (y-y_0)\,s = 0\,, \quad (x-x)\,s + (y-y_0)\,t = 0$$

и, слѣд.,

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{t}\,.$$

§ 37. Линейчатыя поверхности.

Линейчатыми поверхностями называются такія поверхности, которыя могутъ быть образованы движеніемъ прямой линіи, совершающимся непрерывнымъ образомъ по нѣкоторому опредѣленному закону. Таковы, напримѣръ, *коническія* поверхности, описываемыя прямой, проходящей черезъ неподвижную точку и опирающіяся на неподвижную кривую; *цилиндрическія*,—когда всѣ прямыя параллельны между собою (т. е. когда вершина удаляется въ безконечность); таковы *поверхности 2-ой степени*—однополый гиперболоидъ и гиперболическій параболоидъ: 1-я образуется прямыми, опирающимися на три данныя прямыя; 2-я—прямыми, опирающимися на двѣ данныя и параллельными данной плоскости (т. е. опирающимися на ея безконечно-удаленную прямую). Таковы, наконецъ, развертывающіяся поверхности, образуемыя движеніемъ прямой, которая остается касательной къ нѣкоторой кривой двоякой кривизны.

Развертывающіяся поверхности представляютъ только частный случай линейчатыхъ поверхностей, ибо въ нихъ двѣ сосѣднія прямыя,—какъ сосѣднія касательныя къ ребру возврата,—пересѣкаются. Вообще же двѣ сосѣднія образующія линейчатой поверхности не пересѣкаются, какъ въ упомянутомъ случаѣ линейчатыхъ поверхностей 2-го порядка, въ которыхъ прямолинейныя образующія одной системы между собою не пересѣкаются.

Уравненія

$$\left.\begin{aligned} z &= \alpha x + a \\ y &= \beta x + b \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

гдѣ α, β, a и b суть функціи одного параметра θ, опредѣляютъ не одну прямую, а безчисленное ихъ множество. Исключая изъ двухъ уравненій этотъ параметръ, получимъ одно соотношеніе между x, y, z,

$$\Phi(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

которое опредѣлитъ поверхность, на которой лежитъ каждая изъ прямыхъ, опредѣляемыхъ уравненіями (1) при всякомъ значеніи параметра θ. Поэтому (1) можно съ тѣмъ же правомъ считать уравненіями линейчатой поверхности въ параметрической формѣ:

$$\begin{aligned} z &= \alpha(u)v + a(u), \\ y &= \beta(u)v + b(u), \\ x &= v, \end{aligned}$$

если положить въ (1) $\theta = u$, $x = v$, чтобы привести уравненія (1) къ принятой параметрической формѣ.

Постараемся исключить входящія въ (1) *четыре* произвольныя функціи отъ θ. (На самомъ дѣлѣ ихъ только *три*,—ибо одинъ изъ четырехъ коэффиціентовъ можно принять за θ). Для этого будемъ дифференцировать (1) по x и по y, считая въ нихъ θ опредѣленнымъ въ функціи x, y по второму изъ уравненій (1); получимъ:

$$\left.\begin{aligned} p &= \alpha + \theta'_x(x\alpha'_\theta + a'_\theta) \qquad &(\mathrm{I}) \\ 0 &= \beta + \theta'_x(x\beta'_\theta + b'_\theta) \qquad &(\mathrm{II}) \\ q &= \theta'_y(x\alpha'_\theta + a'_\theta) \qquad &(\mathrm{III}) \\ 1 &= \theta'_y(x\beta'_\theta + b'_\theta). \qquad &(\mathrm{IV}) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Эти четыре уравненія позволяютъ исключить производныя α'_θ, a'_θ, β'_θ, и b'_θ и приводятъ къ одному соотношенію, ихъ не содержащему. Изъ уравненій (I) и (III) исключимъ $x\alpha'_\theta + a'_\theta$, изъ уравненій (II) и (IV) исключимъ $x\beta'_\theta + b'_\theta$, получимъ:

$$\frac{p - \alpha}{q} = \frac{\theta'_x}{\theta'_y} \tag{4}$$

$$\frac{-\beta}{1} = \frac{\theta'_x}{\theta'_y} \tag{4'}$$

Такимъ образомъ

$$p + \beta q = \alpha.$$

Но если
$$\frac{\alpha'_\theta}{\beta'_\theta} = \frac{a'_\theta}{b'_\theta}, \tag{6}$$
то изъ (I) и (II) находимъ:
$$\frac{p-\alpha}{-\beta} = \frac{\alpha'_\theta}{\beta'_\theta} = \frac{a'_\theta}{b'_\theta},$$
а изъ (III) и (IV):
$$q = \frac{\alpha'_\theta}{\beta'_\theta} = \frac{a'_\theta}{b'_\theta}.$$

Такимъ образомъ p и q суть функціи θ,—т. е. поверхность будетъ развертывающеюся въ случаѣ, если выполнено условіе (6).

Дифференцируя уравненіе (5) еще разъ по x и по y, получимъ:
$$\beta s + r = (\alpha'_\theta - q\beta'_\theta)\,\theta'_x,$$
$$\beta t + s = (\alpha'_\theta - q\beta'_\theta)\,\theta'_y.$$

Раздѣляя ихъ одно на другое и замѣняя $\frac{\theta'_x}{\theta'_y}$ по (4') черезъ $-\beta$, получимъ:
$$\frac{\beta s + r}{\beta t + s} = -\beta \text{ [1]},$$
т. е.
$$r + 2s\beta + t\beta^2 = 0. \tag{7}$$

Остается продифференцировать еще разъ по x и по y, чтобы составить еще одно уравненіе, содержащее β, и тогда можно будетъ исключить и эту произвольную функцію.

Обозначимъ, какъ и выше (§ 18)
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial r}{\partial x} = k, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} = l.$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x} = m, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial t}{\partial y} = n.$$

Дифференцируя (7) по x и по y, получимъ:
$$k + 2l\beta + m\beta^2 = -\theta'_x(2s\beta'_\theta + 2t\beta\beta'_\theta),$$
$$l + 2m\beta + n\beta^2 = -\theta'_y(2s\beta'_\theta + 2t\beta\beta'_\theta).$$

---

[1]) Если $\frac{r}{s} = \frac{s}{t}$, то имѣемъ только $\frac{r}{s} = \frac{s}{t} = -\beta$. Но тогда поверхность развертывающаяся.

Раздѣляя одно на другое и замѣняя $\frac{\theta'_x}{\theta'_y}$ по (4') черезъ $(-\beta)$, имѣемъ:

$$\frac{k+2l\beta+m\beta^2}{l+2m\beta+n\beta^2}=-\beta,$$

или

$$k+3l\beta+3m\beta^2+n\beta^3=0. \tag{7}$$

Полученныя такимъ образомъ уравненія (6) и (7) содержатъ уже только одну произвольную функцію β параметра θ. Исключая и ее, получимъ окончательное уравненіе, которое распадается на два, линейныхъ относительно производныхъ 3-го порядка, съ коэффиціентами—степенями корней (6), т. е. функціями производныхъ 2-го порядка.

Самое исключеніе довольно сложно, поэтому обыкновенно этого исключенія не производятъ. Окончательный результатъ можно однако представить въ довольно симметричномъ видѣ, если замѣтить, что, такъ какъ развертывающіяся поверхности—частный случай линейчатыхъ, то дифференціальное уравненіе послѣднихъ должно удовлетворяться въ силу уравненій

$$rt-s^2=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}(rt-s^2)=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}(rt-s^2)=0.$$

Дѣйствительно, если означимъ: $D=rt-s^2$, то искомое уравненіе можетъ быть изображено:

$$r\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)^2-2s\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)+t\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)^2=8D.\begin{vmatrix} r & s & t \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y}\end{vmatrix}. \tag{8}$$

Опредѣлитель въ правой части также обращается въ 0 при $D=0$.

§ 38. Нѣкоторыя свойства линейчатыхъ поверхностей. Стрикціонная линія.

Уравненія (6) и (7) допускаютъ геометрическое истолкованіе. Положимъ:

$$rdx^2+2sdxdy+tdy^2=0, \tag{6'}$$

$$kdx^3+3ldx^2dy+3mdxdy^2+ndy^3=0. \tag{7'}$$

Первое есть дифференціальное уравненіе асимптотическихъ линій, и мы приходимъ къ нему, опредѣляя тѣ главныя касательныя, для которыхъ перпендикуляръ изъ точки $(x+dx, \ y+dy, \ z+\Delta z)$ на касательную плоскость есть безконечно малая не 2-го, а 3-го порядка. Этотъ перпендикуляръ своею главною частью имѣетъ:

$$\frac{1}{1.2.3}\frac{k.dx^3+3l.dx^2dy+3m.dx\,dy+ndy^3}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

а, слѣдовательно, при выполненіи $(7')$ и эти члены выпадаютъ, такъ что перпендикуляръ этотъ будетъ безконечно малая не 3-го, а 4-го порядка относительно dx, dy.

На произвольно взятой поверхности не во всякой точкѣ $(6')$ и $(7')$ совмѣстны и даютъ значенія $dy\,/\,dx$, и, слѣдовательно, (8) не тожественно удовлетворяется, но представляетъ уравненіе между x и y, опредѣляющее цилиндръ, который вырѣзаетъ на поверхности кривую. Вдоль этой кривой касательныя имѣютъ съ поверхностью прикосновеніе 3-го порядка. Въ случаѣ же, если (8) удовлетворяется при всякихъ x и y (когда имѣемъ поверхность линейчатую), то *всякая точка поверхности обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что въ каждой точкѣ одна изъ ея главныхъ касательныхъ имѣетъ съ поверхностью прикосновеніе 3-го порядка.*

Вернемся къ уравненіямъ (3)

Исключая θ'_x и θ'_y, найдемъ:

$$p=\alpha-\beta\frac{\alpha'x+a'}{\beta'x+b'}, \qquad q=\frac{\alpha'x+a'}{\beta'x+b'} \tag{9}$$

(здѣсь производныя берутся по параметру θ).

Подставляя въ общее уравненіе касательной плоскости:

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0,$$

получимъ:

$$0=[\alpha(X-x)-(Z-z)](\beta'x+b')-[\beta(X-x)-(Y-y)](\alpha'x+a'),$$

или съ помощью (1):

$$0=(Z-\alpha X-a)(\beta'x+b')-(Y-\beta X-b)(\alpha'x+a').$$

Если точка перемѣщается по образующей, то значеніе параметра θ не измѣняется, а измѣняется только x; касательная плоскость вращается около этой образующей.

Плоскость касательная будетъ одинакова для всѣхъ точекъ одной и той же образующей только при $\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{a'}{b'}$.

При этомъ, какъ видѣли выше, линейчатая поверхность есть развертывающаяся.

Пусть $$\alpha'b' - \beta'a' \neq 0.$$

Примемъ производящую за ось OX. Соотвѣтственныя значенія коэффиціентовъ $\alpha = a = \beta = b = 0$.

Уравненіе касательной плоскости:

$$Z(\beta'x + b') - Y(\alpha'x + a') = 0.$$

Уравненіе нормали въ точкахъ одной и той же образующей:

$$\frac{X-x}{0} = \frac{Y}{-\alpha'x - a'} = \frac{Z}{\beta'x + b'}.$$

Исключая отсюда x, находимъ:

$$Y(\beta'X + b') + Z(\alpha'X + a') = 0,$$

нормали къ линейчатой поверхности въ точкахъ одной и той же образующей образуютъ гиперболическій параболоидъ (Hachette. 1832).

Если ψ — уголъ касательной плоскости съ плоскостью XOY, то:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\alpha'x + a'}{\beta'x + b'}.$$

Для другой точки (x_1) соотвѣтствующій уголъ пусть ψ_1; по извѣстной формулѣ для тангенса разности угловъ:

$$\operatorname{tg}(\psi_1 - \psi) = \frac{(\alpha'x_1 + a')(\beta'x + b') - (\alpha'x + a)(\beta'x_1 + b')}{(\alpha'x_1 + a')(\alpha'x + a') + (\beta'x_1 + b')(\beta'x + b')} =$$
$$= \frac{(a'\beta' - \alpha'b')(x - x_1)}{x\{x_1(\alpha'^2 + \beta'^2) + a'\alpha' + b'\beta'\} + x_1(a'\alpha' + b'\beta') + a'^2 + b'^2}.$$

Знаменатель не зависитъ отъ x, если

$$x_1 = -\frac{a'\alpha' + b'\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2}, \tag{10}$$

и тогда:

$$\operatorname{tg}(\psi_1 - \psi) = \frac{(x - x_1)(\alpha'^2 + \beta'^2)(a'\beta' - \alpha'b')}{(a'^2 + b'^2)(\alpha'^2 + \beta'^2) - (a'\alpha' + b'\beta')^2} = \frac{(x - x_1)(\alpha'^2 + \beta'^2)}{(a'\beta' - \alpha'b')},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}(\psi - \psi_1) = \mu \,.\, JM$$

(гдѣ μ не зависитъ отъ x), если x_1 соотвѣтствуетъ точкѣ J и x — точкѣ M. Таковъ законъ измѣненія угла $\psi_1 - \psi$, открытый M. Chasles'емъ:

тангенсъ угла касательной плоскости, проходящей черезъ данную образующую линейчатой поверхности, возрастаетъ пропорціонально разстоянію точки прикосновенія отъ точки J. Отсюда заключаемъ: касательныя плоскости къ линейчатой поверхности въ точкахъ одной и той же образующей образуютъ пучекъ плоскостей, проэктивный точечному ряду ихъ точекъ прикосновенія. Коэффиціентъ μ называется *параметромъ распредѣленія*. Точка J называется *центральною точкою* образующей. Мы приходимъ къ ней также разсматривая касательную плоскость, перпендикулярную къ той, которой точка прикосновенія есть безконечно-удаленная точка образующей. Чтобы получить эту послѣднюю плоскость, дѣлимъ уравненіе касательной на x и полагаемъ $x=\infty$. Получимъ:

$$Z\beta' - Y\alpha' = 0.$$

Условіе перпендикулярности

$$\alpha'(\alpha' x_1 + a') + \beta'(\beta' x_1 + b') = 0,$$

этой плоскости съ касательною плоскостью, соотвѣтствующей $x = x_1$ даетъ для x_1 снова значеніе (10).

При такомъ опредѣленіи центральной точки можно вычислить выраженіе для μ и не принимая образующую за ось OX.

Общее выраженіе параметра распредѣленія

$$\mu = \frac{\alpha'^2 + \beta'^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}{(\alpha' b' - \beta' a)(1 + \alpha^2 + \beta^2)}.$$

Совершенно инымъ образомъ придемъ къ центральной точкѣ, разсматривая прямую—кратчайшее разстояніе двухъ безконечно-близкихъ образующихъ.

Образующая D'—безконечно-близкая къ принятой за ось OX, которую означимъ D, имѣетъ уравненія:

$$Z = Xd\alpha + da, \quad Y = Xd\beta + db.$$

Общій перпендикуляръ къ D и D' проэктируется на плоскость ZOY по прямой, перпендикулярной къ проэкціи D' на ту же плоскость.

Уравненіе этой проэкціи D':

$$Z = -\frac{\beta'}{\alpha'} Y,$$

есть въ тоже время уравненіе плоскости, проходящей черезъ OX (т. е. D) и пересѣкающей D' въ точкѣ:

$$\frac{Xd\alpha + da}{Xd\beta + db} = -\frac{\beta'}{\alpha'}, \text{ или } X(\alpha'^2 + \beta'^2) = -(\alpha' a' + \beta' b'),$$

т. е. въ центральной точкѣ, которая такимъ образомъ есть *точка встрѣчи съ D' прямой, перпендикулярной и D и къ D' — ихъ кратчайшаго разстоянія.* На каждой образующей есть одна центральная точка.

Въ развертывающейся поверхности двѣ сосѣднія образующія пересѣкаются, ихъ кратчайшее разстояніе равно нулю, и точка встрѣчи должна разсматриваться, какъ центральная точка; иными словами: центральною точкою образующей развертывающейся поверхности является ея характеристическая точка. Геометрическое мѣсто центральныхъ точекъ линейчатой поверхности называется *стрикціонной линіей.* Чтобы вывести общее уравненіе стрикціонной линіи, возьмемъ уравненія прямолинейныхъ образующихъ въ болѣе симметричномъ видѣ:

$$\frac{X-a}{\lambda} = \frac{Y-b}{\mu} = \frac{Z-c}{\nu}, \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} X = a + \lambda\sigma \\ Y = b + \mu\sigma \\ Z = c + \nu\sigma \end{array} \right\} \tag{11}$$

Безконечно близкая образующая опредѣлится уравненіями

$$\frac{X-a-a'\varepsilon}{\lambda+\lambda'\varepsilon} = \frac{Y-b-b'\varepsilon}{\mu+\mu'\varepsilon} = \frac{Z-c-c'\varepsilon}{\nu+\nu'\varepsilon}$$

Линія кратчайшаго разстоянія между этими прямыми опредѣляется уравненіями:

$$0 = \begin{vmatrix} X-a & Y-b & Z-c \\ \lambda & \mu & \nu \\ \mu\nu'-\nu\mu' & \nu\lambda'-\lambda\nu' & \lambda\mu'-\mu\lambda' \end{vmatrix},$$

$$0 = \begin{vmatrix} X-a-a'\varepsilon & Y-b-b'\varepsilon & Z-c-c'\varepsilon \\ \lambda+\lambda'\varepsilon & \mu+\mu'\varepsilon & \nu+\nu'\varepsilon \\ \mu\nu'-\nu\mu' & \nu\lambda'-\lambda\nu' & \lambda\mu'-\mu\lambda' \end{vmatrix}.$$

Вторая плоскость пересѣкаетъ первую прямую въ точкѣ, для которой σ опредѣлится уравненіемъ:

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda\sigma-a'\varepsilon & \mu\sigma-b'\varepsilon & \nu\sigma-c'\varepsilon \\ \lambda+\lambda'\varepsilon & \mu+\mu'\varepsilon & \nu+\nu'\varepsilon \\ \mu\nu'-\nu\mu' & \nu\lambda'-\lambda\nu' & \lambda\mu'-\mu\lambda' \end{vmatrix}$$

Вычитая 2-ую строку, умноженную на σ, изъ 1-ой, сокращая потомъ на $(-\varepsilon)$ и полагая въ предѣлѣ $\varepsilon = 0$, будемъ имѣть:

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda'\sigma + a' & \mu'\sigma + b' & \nu'\sigma + c' \\ \lambda & \mu & \nu \\ \mu\nu' - \nu\mu' & \nu\lambda' - \lambda\nu' & \lambda\mu' - \mu\lambda' \end{vmatrix};$$

такимъ образомъ:

$$0 = \sigma \,.\begin{vmatrix} \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda & \mu & \nu \\ \mu\nu' - \nu\mu' & \nu\lambda' - \lambda\nu' & \lambda\mu' - \mu\lambda' \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ \lambda & \mu & \nu \\ \mu\nu' - \nu\mu' & \nu\lambda' - \lambda\nu' & \lambda\mu' - \mu\lambda' \end{vmatrix}.$$

Множитель при σ есть:

$$-[(\lambda\mu' - \nu\mu')^2 + (\lambda\nu' - \nu\lambda')^2 + (\mu\nu' - \nu\mu')^2] =$$
$$= -[(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2) - (\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')^2]$$

слѣдоват., онъ равенъ

$$-(\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2),$$

если λ, μ, ν суть косинусы прямой съ осями, ибо тогда $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ и $\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$. Такимъ образомъ при этомъ

$$\sigma = -\frac{1}{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}\,.\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ \lambda & \mu & \nu \\ \mu\nu' - \nu\mu' & \nu\lambda' - \lambda\nu' & \lambda\mu' - \mu\lambda' \end{vmatrix}.$$

Подставляя въ уравненіе образующей это значеніе σ, получимъ координаты центральной точки:

$$X = a - \frac{\lambda\,.\,\Delta}{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2} \tag{12}$$

$$Y = b - \frac{\mu\,.\,\Delta}{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2} \tag{12'}$$

$$Z = c - \frac{\nu\,.\,\Delta}{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2} \tag{12''}$$

гдѣ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ \lambda & \mu & \nu \\ \mu\nu' - \nu\mu' & \nu\lambda' - \lambda\nu' & \lambda\mu' - \mu\lambda' \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Примѣръ 1. Для поверхности $x^2-y^2=2z$ прямолинейныя образующія могутъ быть опредѣлены уравненіями:

$$\frac{x-\tau}{1}=\frac{y-\tau}{-1}=\frac{z}{2\tau}$$

Стало быть:

$$a=b=\tau,\quad c=0,\quad a'=b'=1,\quad c'=0$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2+4\tau^2}}=-\mu,\quad \nu=\frac{2\tau}{\sqrt{2+4\tau^2}};$$

$$\lambda'=-\frac{4\tau}{(2+4\tau^2)^{3/2}},\quad \mu'=\frac{4\tau}{(2+4\tau^2)^{3/2}},\quad \nu'=\frac{4}{(2+4\tau^2)^{3/2}}$$

$$\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2=\frac{16+32\tau^2}{(2+4\tau^2)}=\frac{16(1+2\tau^2)}{8(1+2\tau^2)^3}=2.\frac{1}{(1+2\tau^2)^2}.$$

Опредѣлитель $\triangle$ въ этомъ случаѣ будетъ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & \lambda & \nu \\ \nu\lambda'-\lambda\nu' & \nu\lambda'-\lambda\nu' & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & -2\lambda & \nu \\ \nu\lambda'-\lambda\nu' & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Такимъ образомъ

$$x=\tau=y,\quad z=0,$$

прямолинейная образующая въ плоскости XOY.

Для второй системы прямолинейныхъ образующихъ стрикціонною линіей будетъ вторая прямолинейная образующая, лежащая въ плоскости XOY.

Примѣръ 2. Прямолинейныя образующія однополаго гиперболоида вращенія

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

могутъ быть заданы уравненіями

$$\frac{y}{a}-\frac{z}{c}=\theta\left(1-\frac{x}{a}\right),\quad \frac{y}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\theta}\left(1+\frac{x}{a}\right)$$

или если означить $\theta+\frac{1}{\theta}=2u$, $\theta-\frac{1}{\theta}=2v$, такъ что $u^2-v^2=1$,

$$\frac{x}{a}=\frac{y-au}{-av}=\frac{z+cv}{cu}=\sigma. \qquad \text{(a)}$$

Уравненіе для σ напишется:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & au' & -cv' \\ a & -av & cu \\ ac(uv'-vu') & -acu' & a^2v' \end{vmatrix} + \sigma \begin{vmatrix} 0 & -av' & cu' \\ a & -av & cu \\ ac(uv'-vu') & -acu' & -a^2 \end{vmatrix};$$

замѣтивъ, что $u' = \frac{v}{\theta}$, $v' = \frac{u}{\theta}$ и отбросивъ множитель $\frac{a}{\theta^2}$, приведемъ его, по раскрытіи опредѣлителей, къ виду

$$0 = a(a^2+c^2)uv - \sigma(a^2+c^2)au^2$$

такъ что $\sigma = \frac{v}{u}$.

Поэтому для стрикціонной линіи $\frac{z+cv}{cu} = \frac{v}{u}$ или $z=0$, то есть стрикціонною линіею гиперболоида вращенія будетъ его горловое сѣченіе

$$z=0, \quad x^2+y^2=a^2.$$

Примѣръ 3. Подобнымъ образомъ найдемъ, что стрикціонная линія однополаго гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

опредѣляется при сходныхъ обозначеніяхъ уравненіями

$$X = a \cdot \frac{a^2(b^2+c^2)uv}{a^2(b^2+c^2)u^2-c^2(a^2-b^2)},$$

$$Y = b \cdot \frac{b^2(a^2+c^2)u}{a^2(b^2+c^2)u^2-c^2(a^2-b^2)},$$

$$Z = c \cdot \frac{c^2(a^2-b^2)v}{a^2(b^2-c^2)u^2-c^2(a^2-b^2)},$$

и слѣдовательно, представляетъ пересѣченіе гиперболоида поверхностью

$$Y\{c^4(a^2+b^2)X^2-a^4(b^2-c^2)Z^2\} = ac(a^2+b^2)b^3XZ.$$

или поверхностью

$$\frac{a^6(b^2+c^2)^2}{X^2}+\frac{b^6(a^2+c^2)^2}{Y^2}-\frac{c^6(a^2-b^2)^2}{Z^2}=0.$$

§ 38. Приложеніе къ кривымъ двоякой кривизны.

Примѣнимъ полученный выше общій результатъ къ теоріи кривыхъ двоякой кривизны. Бинормали кривой не пересѣкаются. Ихъ совокупность составляетъ, слѣдовательно, косую линейчатую поверхность.

Пусть образующая линейчатой поверхности есть бинормаль кривой двоякой кривизны. Тогда въ формулахъ (12) предыдущаго параграфа:

$$a = x, \quad b = y, \quad c = z,$$

$$a' = x' = \alpha, \quad b' = y' = \beta, \quad c' = z' = \gamma$$

$$\lambda' = \frac{l}{\varrho}, \quad \mu' = \frac{m}{\varrho}, \quad \nu' = \frac{n}{\varrho},$$

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = \frac{1}{\varrho^2}, \qquad \mu\nu' - \nu\mu' = \frac{\mu n - \nu m}{\varrho} = -\frac{\alpha}{\varrho} \text{ и т. д.}$$

такъ что уравненіе для σ есть:

$$0 = -\frac{\sigma}{\varrho} - \frac{1}{\varrho}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = -\frac{\sigma}{\varrho},$$

т. е. $\sigma = 0$, и. слѣдовательно, точка стрикціонной линіи поверхности бинормалей, соотвѣтствующая точкѣ (x, y, z), и есть сама точка (x, y, z).

Итакъ: *кривая двоякой кривизны есть стрикціонная линія линейчатой поверхности—геометрическаго мѣста ея бинормалей.*

Касательная къ кривой перпендикулярна къ бинормали. Поэтому *кривая двоякой кривизны является ортогональною траэкторіей для прямолинейныхъ образующихъ линейчатой поверхности бинормалей, на которой она служитъ стрикціонною линіей.*

Это не будетъ однако общимъ свойствомъ стрикціонной линіи на произвольно заданной линейчатой поверхности.

Дѣйствительно, косинусъ угла прямолинейной образующей линейчатой поверхности (11) § 37 и ея стрикціонной линіи (12) § 37 имѣетъ числителемъ выраженіе

$$\lambda X' + \mu Y' + \nu Z' = (\lambda a' + \mu b' + \nu c') - \frac{\Delta}{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu') -$$

$$-\left(\frac{\Delta}{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}\right)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = (\lambda a' + \mu b' + \nu c') - \left(\frac{\Delta}{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}\right).$$

Въ случаѣ линейчатой поверхности бинормалей $\Delta=0$, $\lambda a'+\mu b'+\nu c'$ обращается въ $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$ и слѣдовательно также равно 0.

Но вообще это выраженіе не равно нулю, и такимъ образомъ кратчайшее разстояніе мэжду двумя безконечно-близкими образующими не составляетъ элемента стрикціонной линіи, которая является лишь геометрическимъ мѣстомъ начальныхъ (или конечныхъ точекъ) этихъ кратчайшихъ разстояній.

§ 39. Теорема Bouquet.

Тѣже результаты можно получить еще иначе. Кратчайшее разстояніе между двумя сосѣдними образующими линейчатой поверхности, соотвѣтствующими значеніями θ и $\theta+\Delta\theta$ параметра

$$z=\alpha x+a\,,\quad y=\beta x+b \tag{1}$$

и

$$z=(\alpha+\Delta\alpha)x+a+\Delta a\,,\quad y=(\beta+\Delta\beta)x+b+\Delta b \tag{1'}$$

по извѣстной формулѣ аналитической геометріи выразится:

$$\delta=\pm\begin{vmatrix}0 & \Delta b & \Delta a\\ 1 & \beta & \alpha\\ 1 & \beta+\Delta\beta & \alpha+\Delta\alpha\end{vmatrix}:\sqrt{(\beta(\alpha+\Delta\alpha)-\alpha(\beta+\Delta\beta))^2+\Delta\alpha^2+\Delta\beta^2}$$

$$=\pm\frac{\Delta a.\Delta\beta-\Delta b.\Delta\alpha}{\sqrt{\Delta\alpha^2+\Delta\beta^2+(\alpha\Delta\beta-\beta\Delta\alpha)^2}}$$

Если замѣнимъ здѣсь приращеніе Δa, $\Delta b\ldots$ ихъ разложеніями по степенямъ $\Delta\theta$

$$\Delta a=a'\Delta\theta+\frac{1}{2}a''\Delta\theta^2+\frac{1}{6}a'''\Delta\theta^3+\ldots$$

и т. д., то получимъ въ знаменателѣ подъ корнемъ

$$\Delta\theta^2[\alpha'^2+\beta'^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2]+\text{ члены 3-го и высшихъ порядковъ}$$

въ числителѣ:

$$\Delta a.\Delta\beta-\Delta b.\Delta\alpha=(a'\beta'-b'\alpha')\Delta\theta^2+\frac{1}{2}(a''\beta'+a'\beta''-b''\alpha'-b'\alpha'')\Delta\theta^3$$
$$+\left\{\frac{1}{6}(a'''\beta'+\beta'''a'-b'''\alpha'-\alpha'''b')+\frac{1}{4}(a''\beta''-b''\alpha'')\right\}\Delta\theta^4+$$

+ члены 5-го и высшихъ порядковъ.

Здѣсь коэффиціентъ члена 3-го порядка можно переписать

$$\frac{1}{2}(a'\beta'-b'\alpha')'$$

Такимъ образомъ: *для линейчатой поверхности кратчайшее разстояніе между двумя безконечно-близкими образующими есть вообще безконечно-малая 1-го порядка* (числитель 2-го и знаменатель 1-го). Если же поверхность развертывающаяся, то въ числителѣ не только членъ 2-го порядка, но и членъ 3-го порядка выпадаетъ, и слѣдовательно, *двѣ безконечно-близкія образующія развертывающейся поверхности пересѣкаются съ точностью до безконечно-малыхъ 3-го порядка.*

Обращаемся къ членамъ 4-го порядка числителя. Множитель при $\Delta\theta^4$

$$\frac{1}{6}(a'''\beta'+\beta'''a'-b'''\alpha'-b'\alpha''')+\frac{1}{4}(a''\beta''-b''\alpha'')$$

съ помощью производной отъ коэффиціента при $\Delta\theta^3$:

$$(a'\beta'-b'\alpha')''=(a'''\beta'+a'\beta'''-b'''\alpha'-b'\alpha''')+2(a''\beta''-b''\alpha'')$$

можетъ быть приведенъ къ виду:

$$\frac{1}{6}(a'\beta'-b'\alpha')''+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(a''\beta''-b''\alpha'').$$

Если поэтому уничтожается не только членъ 3-го порядка, но и членъ 4-го порядка, то должно быть сверхъ $a'\beta'-b'\alpha'=0$ еще

$$a''\beta''-b''\alpha''=0.$$

Но въ силу $a'\beta'-b'\alpha'=0$

$$\frac{\alpha'}{a'}=\frac{\beta'}{b'}=k,$$

т. е. $\alpha'=ka'$, $\beta'=kb'$ и слѣдовательно,

$$\alpha''=ka''+k'a',\quad \beta''=kb''+k'b'.$$

Поэтому

$$a''\beta''-b''\alpha''\equiv k'(a''b'-b''a').$$

Второе уравненіе распадается такимъ образомъ на два:

Во-первыхъ

$$k'=0\ \therefore\ k=\text{Const}; \tag{1}$$

при этомъ изъ $\alpha' = ka'$, $\beta' = kb'$ слѣдуетъ $\alpha = ka + k_1$ и $\beta = kb + k_2$ такъ что уравненіе прямолинейной образующей линейчатой поверхности принимаетъ видъ

$$z - k_1 = a(x + k)\,,$$

$$y - k_2 = b(x + k)\,;$$

исключеніе отсюда θ приведетъ къ уравненію вида

$$\Phi\left(\frac{z - k_1}{x + k}\,,\ \frac{y - k_2}{x + k}\right) = 0$$

т. е. въ этомъ случаѣ линейчатая поверхность есть *коническая.*

Во-вторыхъ можетъ обращаться въ нуль второй множитель:

$$a''b' - b''a' = 0 \qquad (2)$$

отсюда

$$\frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'} \quad \text{или} \quad \left(\log\frac{a'}{b'}\right)' = 0$$

и слѣдовательно $a' = C.b'$, $a = C.b + C'$ гдѣ C и C' двѣ произвольныхъ постоянныхъ. Такъ какъ кромѣ того $a'\beta' - b'\alpha' = 0$, то и $\alpha' = C.\beta'$, такъ что $\alpha = C\beta + C''$.

Внося эти значенія въ уравненіе (1) образующей, получимъ:

$$z = (C\,.\,b + C')x + C\beta + C''$$

$$y = bx + \beta$$

или

$$z = C(bx + \beta) + C'x + C''$$

т. е. независимо отъ значеній θ, координаты x, y, z связаны уравненіемъ

$$z = Cy + C'x + C''\,,$$

всѣ образующія лежатъ въ плоскости и огибаютъ слѣдовательно нѣкоторую плоскую кривую.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ теоремѣ *Bouquet: Если не только члены 1-го и 2-го, но и члены 3-го порядка въ выраженіи для σ обращаются въ нуль, то линейчатая поверхность или конусъ или образуется прямыми, лежащими въ плоскости и огибающими плоскую кривую.*

Выраженіе, стоящее въ знаменателѣ σ, пропорціонально синусу угла между двумя образующими; если означимъ его φ, то ограничиваясь членами 1-го порядка, имѣемъ

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{a'^2 + \beta'^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}}{1 + \alpha'^2 + \beta'^2}\,\Delta\theta\,.$$

Для малыхъ $\Delta\theta$, $\sin\varphi$ стало быть величина также безконечно-малая и слѣдовательно, $\sin\varphi$ можетъ быть замѣненъ черезъ φ. Отсюда

$$\frac{\sigma}{\varphi}=\frac{(a'\beta'-b'\alpha')(\alpha'^2+\beta'^2+1)}{a'^2+\beta'^2+(\alpha\beta'^2-\beta\alpha')^2} \tag{3}$$

это есть *параметръ распредѣленія*. Для развертывающейся поверхности онъ обращается въ 0.

§ 40. Понятія о системахъ прямыхъ.

Изученіе линейчатыхъ поверхностей въ томъ направленіи, которое здѣсь намѣчено, вводитъ насъ въ новую область—область *линейчатой геометріи*, въ которой за основной элементъ, изъ котораго образуются всѣ фигуры, принимается не точка, какъ мы принимали до сихъ поръ, кладя въ основу систему прямоугольныхъ или иныхъ координатъ, а *прямая линія*, какъ цѣлое.

Въ уравненіяхъ прямой

$$\left.\begin{aligned} z&=\alpha x+a\\ y&=\beta x+b \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

мы можемъ принимать всѣ четыре коэффиціента α, a, β, b *независимыми* и придавая имъ всевозможныя значенія, получимъ всѣ прямыя пространства. Каждый изъ четырехъ коэффиціентовъ принимаетъ ∞ вещественныхъ значеній, каждое изъ которыхъ можетъ быть скомбинировано съ каждымъ изъ остальныхъ трехъ. Говорятъ поэтому, что въ пространствѣ имѣется ∞^4 прямыхъ или что пространство, если за основной элементъ принять прямую, имѣетъ *четыре измѣренія*, является *многообразіемъ четырехъ измѣреній*.

Налагая на коэффиціенты α, a, β, b (которые теперь можно считать *координатами* [1]) прямой) *одно* условіе, т. е. предполагая, что эти коэффиціенты связаны *однимъ* уравненіемъ

$$F(\alpha, a, \beta, b)=0, \tag{2}$$

имѣемъ независимыхъ только *три*, или же можемъ выразить α, a, β, b въ функціи *трехъ* независимыхъ между собою параметровъ θ_1, θ_2, θ_3. Получимъ ∞^3 прямыхъ, образующихъ *комплексъ* прямыхъ.

---

[1]) Собственно въ линейчатой геометріи за координаты прямой принимаются не *четыре* эти величины, а *пять*: α, a, β, b и $\alpha b-\beta a=c\,(a)$; связанныя между собою уравненіемъ *второй* степени (a). Пятая величина получится, если составимъ уравненіе проэкціи прямой на плоскость zoy: $\alpha y-\beta z=\alpha b-\beta a$.

Черезъ каждую точку (x, y, z) пространства проходитъ безчисленное множество (∞^1) принадлежащихъ данному комплексу прямыхъ, тѣ именно, которыя при данныхъ x, y, z удовлетворяютъ тремъ уравненіямъ (1) и (2). Онѣ образуютъ слѣдовательно нѣкоторую *коническую поверхность*, которая называется *поверхностью комплекса*, принадлежащею точкѣ (x, y, z). Подобнымъ образомъ, прямыя комплекса, лежащія въ данной плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3}$$

должны быть таковы, что (3) при замѣнѣ y и z по (1) должно удовлетворяться при всякомъ x; т. е. должно быть

$$\begin{aligned} A + B\beta + C\alpha &= 0 \\ D + Bb + Ca &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Такимъ образомъ эти прямыя должны выполнять *три* уравненія (2) и (4) и такихъ прямыхъ будетъ ∞^1,— онѣ огибаютъ нѣкоторую плоскую кривую—*кривую комплекса*, принадлежащую плоскости (3).

Если коэффиціенты α, a, β, b связаны двумя соотношеніями

$$F_1(\alpha, a, \beta, b) = 0, \quad F_2(\alpha, a, \beta, b) = 0, \tag{5}$$

то мы можемъ взять произвольно только *два*, остальные уже будутъ опредѣлены уравненіями (5), или можно α, a, β, b выразить въ функціи двухъ независимыхъ параметровъ. Получаемъ конфигурацію, состоящую изъ ∞^2 прямыхъ и называемую *конгруэнціей* прямыхъ: черезъ каждую точку проходитъ опредѣленное число прямыхъ, которыхъ коэффиціенты α, a, β, b опредѣлятся при данныхъ x, y, z изъ четырехъ уравненій (1) и (5), и конечное число прямыхъ лежитъ въ каждой данной плоскости—тѣ именно, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ (4) и (5).

Наконецъ три соотношенія между коэффиціентами α, a, β, b приводятъ насъ къ линейчатымъ поверхностямъ.

§ 41. Конгруэнціи.

Обращаемся къ *конгруэнціямъ*. Пусть въ уравненіяхъ образующей

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + a \\ y &= \beta x + b \end{aligned}$$

коэффиціенты суть функціи двухъ независимыхъ параметровъ θ_1 и θ_2. Если установить между θ_1 и θ_2 нѣкоторую зависимость, то получимъ нѣкоторую линейчатую поверхность. Это послѣдняя будетъ по предыдущему развертывающеюся, если установленная между θ_1 и θ_2 зависимость такова, что $a'\beta' - b'\alpha' = 0$, гдѣ производныя берутся по тому параметру, который принятъ за независимый; если расписать подробнѣе, должно быть:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \theta_1} + \frac{\partial a}{\partial \theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right)\left(\frac{\partial \beta}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \beta}{\partial \theta_2}\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right) - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_2}\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial \theta_1} + \frac{\partial b}{\partial \theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right) = 0,$$

что представляетъ дифференціальное уравненіе вида

$$P\left(\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right)^2 + Q\left(\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right) + R = 0,$$

которое разлагается на два

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \varphi_1(\theta_1, \theta_2), \quad \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \varphi_2(\theta_1, \theta_2). \tag{7}$$

Проинтегрировавъ каждое изъ этихъ уравненій, получимъ интегралъ $\theta_2 = \psi(\theta_1, C)$ зависящій отъ произвольной постоянной, которую можно подобрать такъ, чтобы при $\theta_1 = \theta_1^0$ было $\theta_2 = \theta_2^0$, т. е. интегралъ каждаго изъ двухъ дифференціальныхъ уравненій (7) опредѣляетъ безконечное множество развертывающихся поверхностей, и черезъ каждую прямую конгруэнціи проходятъ двѣ такихъ поверхности. Соотвѣтственно каждая прямая содержитъ двѣ точки,—точки реберъ возврата той и другой развертывающейся. Эти точки называютъ *фокальными точками* образующей, а ихъ геометрическое мѣсто, соотвѣтственно всѣмъ образующимъ конгруэнціи, есть нѣкоторая поверхность, называемая *фокальною поверхностью* конгруэнціи.

Фокальныя точки образующей можно получить и не интегрируя уравненія (7). Дѣйствительно, если взяли одну образующую (1), то безконечно-близкая (1′) встрѣчаетъ ее, если

$$0 = x\Delta\alpha + \Delta a, \quad 0 = x\Delta\beta + \Delta b.$$

Исключая отсюда x, мы и получимъ условіе

$$a'\beta' - \alpha' b' = 0.$$

Если же напротивъ напишемъ коэффиціенты при $\Delta\theta_1$ и исключимъ $\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$, то получимъ уравненіе, которому при данныхъ θ_1, θ_2 должна удовлетворять координата x встрѣчи двухъ послѣдовательныхъ прямыхъ конгруэнціи, которыя и будутъ приэтомъ образующими развертывающейся поверхности.

Имѣемъ:

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= x\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_1}+\frac{\partial a}{\partial\theta_1}+\left(x\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_2}+\frac{\partial a}{\partial\theta_2}\right)\frac{d\theta_2}{d\theta_1} \\ 0 &= x\frac{\partial\beta}{\partial\theta_1}+\frac{\partial b}{\partial\theta_1}+\left(x\frac{\partial\beta}{\partial\theta_2}+\frac{\partial b}{\partial\theta_2}\right)\frac{d\theta_2}{d\theta_1} \end{aligned}\right.$$

Исключая отсюда $\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$ найдемъ

$$0=\left(x\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_1}+\frac{\partial a}{\partial\theta_1}\right)\left(x\frac{\partial\beta}{\partial\theta_2}+\frac{\partial b}{\partial\theta_2}\right)-\left(x\frac{\partial\alpha}{\partial\theta_2}+\frac{\partial a}{\partial\theta_2}\right)\left(x\frac{\partial\beta}{\partial\theta_1}+\frac{\partial b}{\partial\theta_1}\right) \qquad (8)$$

Это уравненіе второй степени относительно x и потому при данныхъ θ_1, θ_2 доставитъ два значенія, — на каждой прямой конгруэнціи опредѣлятся двѣ (фокальныхъ) точки. Предполагая же θ_1, θ_2 перемѣнными, изъ трехъ уравненій (1) и (8) можемъ исключить ихъ и получимъ уравненіе геометрическаго мѣста фокальныхъ точекъ—*фокальную поверхность*. Эта поверхность должна состоять изъ двухъ полостей, описываемыхъ одна одною фокальною точкою, другая—другою.

Эта фокальная поверхность будетъ содержать не одну только характеристическую точку какой-нибудь развертывающейся, но и все ея ребро возврата. Дѣйствительно, конгруэнціи принадлежатъ всѣ прямыя каждой такой развертывающейся, которыя суть въ тоже время касательныя къ ея ребру возврата, и слѣдовательно, каждая точка этой кривой является пересѣченіемъ нѣкоторой прямой конгруэнціи съ безконечно-близкой прямой той же конгруэнціи, т. е. будетъ ея фокальною точкою и слѣдовательно, должна принадлежать геометрическому мѣсту этихъ точекъ—фокальной поверхности. И всякая прямая конгруэнціи касается двухъ полостей фокальной поверхности.

Пусть F и F' двѣ фокальныя точки нѣкоторой образующей. Черезъ послѣднюю проходятъ двѣ плоскости γ и γ' — касательныя къ проходящимъ черезъ образующую развертывающимся и такимъ образомъ соотвѣтствующія ея фокальнымъ точкамъ. Плоскости эти называются *фокальными плоскостями*. Можно убѣдиться, что въ тоже время γ есть касательная плоскость къ поверхности Σ', геометрическому мѣсту точки F' и γ' есть касательная къ Σ—геометрическому мѣсту точки F.

Дѣйствительно, пусть прямая перемѣщается, оставаясь касательной къ ребру возврата 1-ой развертывающейся, и слѣдовательно, къ Σ; она при этомъ будетъ постоянно касаться и Σ'; точка прикосновенія ея съ Σ' опишетъ на Σ' кривую C', проходящую черезъ F', но отличную отъ ребра возврата 2-ой развертывающейся. Описанная прямою развертывающаяся будетъ имѣть съ Σ двѣ общихъ касательныхъ,— касательную въ F'' къ ребру возврата 2-ой развертывающейся и касательную въ F' къ C', стало быть онѣ имѣютъ общую касательную плоскость, которая будетъ такимъ образомъ соприкасающеюся плоскостью къ ребру возврата первой развертывающейся и касательною плоскостью къ Σ'.

Если одна изъ плоскостей фокальной поверхности вырождается въ кривую, то прямыя конгруэнціи будутъ встрѣчать эту кривую и касаться другой полости. Одною изъ развертывающихся будетъ поэтому для каждой прямой конгруэнціи конусъ, касательный къ полости фокальной поверхности и имѣющій вершину на кривой, къ которой привелась другая ея полость. Если обѣ полости сводятся къ кривымъ линіямъ, то развертывающіяся, о которыхъ идетъ рѣчь, будутъ конусы, проходящіе черезъ одну кривую и имѣющіе вершины на другой.

§ 42. Конгруэнція нормалей нѣкоторой поверхности.

Нормаль поверхности $z = f(x, y)$

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$$

есть прямая, уравненія которой зависятъ отъ двухъ параметровъ (x, y). Поэтому совокупность нормалей къ нѣкоторой поверхности представляетъ частный случай конгруэнціи прямыхъ. Тѣ развертывающіяся поверхности, о которыхъ говорилось выше, будутъ такимъ образомъ составляться такими нормалями, которыя пересѣкаются съ ихъ безконечно-близкими. Но мы видѣли (§ 22), что точки, имѣющія такія нормали, образуютъ на поверхности линіи кривизны. Такимъ образомъ, *развертывающіяся конгруэнціи нормалей нѣкоторой поверхности, проходящія черезъ какую-нибудь нормаль, пересѣкаютъ поверхность по ея линіямъ кривизны. По свойству этихъ послѣднихъ онѣ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Фокальными плоскостями служатъ плоскости главныхъ нормальныхъ сѣченій.*

Наконецъ *фокальною поверхностью является поверхность центровъ кривизны главныхъ нормальныхъ сѣченій (эволюта) поверхности.*

Дѣйствительно, напишемъ уравненія нормали подъ видомъ

$$Z = -\frac{X-x}{p} + z, \qquad Y = \frac{(X-x)q}{p} + y,$$

составимъ уравненіе (8), принявъ $\theta_1 = x$, $\theta_2 = y$; получимъ

$$\left| \begin{matrix} \dfrac{r(X-x)}{p^2} + p + \dfrac{1}{p}, & \dfrac{(X-x)s}{p^2} + q \\ (X-x)\dfrac{ps-qr}{p^2} - \dfrac{q}{p}, & (X-x)\dfrac{pt-qs}{p^2} + 1 \end{matrix} \right| = 0,$$

или если первую строчку умножить на q, придать ко второй и отб сить затѣмъ общіе множители $\frac{1}{q}$:

$$0 = \left| \begin{matrix} \dfrac{r(X-x)}{p} + 1 + p^2, & \dfrac{s(X-x)}{p} + pq \\ \dfrac{s(X-x)}{p} + pq, & \dfrac{t(X-x)}{p} + 1 + q^2 \end{matrix} \right|.$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (21) § 28 заключаемъ

$$\frac{X-x}{p} = \frac{1}{K} = \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

откуда,

$$X - x = \frac{R \cdot p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

и слѣдовательно по уравненію нормали

$$Y - y = \frac{R \cdot q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$Z - z = \frac{-R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Сравнивъ эти выраженія съ уравненіями § 27, видимъ, что ф кальныя точки совпадаютъ съ центрами кривизны главныхъ нормал ныхъ сѣченій, и слѣдовательно, дѣйствительно фокальною поверхност конгруэнціи нормалей данной поверхности является ея эволюта.

Но не всякая конгруэнція можетъ быть разсматриваема, какъ ко груэнція нормалей нѣкоторой поверхности. Для этого необходимо и д статочно, чтобы фокальныя плоскости каждой прямой конгруэнціи был взаимно-перпендикулярны.